I

„Funkcye elliptyczne"

według Weierstrassa (Selivanov).

Rozdział I.

Теорія эллиптическихъ функцій.

Показат. ф—ія

$$\mathcal{E}(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^r}{r!}$$

имѣетъ слѣд. свойства:

1) при конечном значеніи аргумента она имѣетъ характер цѣлой ф—іи;

2) существует теорема сложенія:

$$\mathcal{E}(x+y) = \mathcal{E}(x) \cdot \mathcal{E}(y);$$

3) значенія ф—іи образуют геометрическую прогрессію, если значенія аргумента составляют ариѳм. прогр.

$$x_2 = \frac{1}{2}(x_1 + x_3); \quad \mathcal{E}(x_1) \cdot \mathcal{E}(x_3) = \mathcal{E}^2(x_2) \text{ или}$$

$$\frac{\mathcal{E}(x_2)}{\mathcal{E}(x_1)} = \frac{\mathcal{E}(x_3)}{\mathcal{E}(x_2)};$$

4) между ф—іей и производной существует алгебраич. зависимость

$$\frac{\partial \mathcal{E}(x+y)}{\partial x} = \frac{\partial \mathcal{E}(x+y)}{\partial y} \text{ или } \frac{\mathcal{E}'(x)}{\mathcal{E}(x)} = \frac{\mathcal{E}'(y)}{\mathcal{E}(y)} = \text{const.}$$

5) $\mathcal{E}$ періодическая ф—ія с періодом $2\pi i$

$$\mathcal{E}(x+2n\pi i) = \mathcal{E}(x).$$

Возьмемъ $\varphi(u)=\mathcal{E}(au+b)$; она имѣетъ слѣд. свойства:

1) $\varphi(u)$ однозначн. ф-ія с характером цѣлой ф-іи;

2) ариѳм. ряду аргументовъ (соотвѣтств. геометр. ряд значеній самой ф-іи, т. е. имѣетъ мѣсто теорема сложенія вида

$$\varphi(u)\cdot\varphi(v) = C\varphi(u+v),$$ гдѣ C - пост.;

3) между φ и ея производн. существ. алгебраич. зависимость;

4) φ — періодич. ф-ія с періодомъ $2\omega = \frac{2\pi i}{a}$.

Пусть теперь $\psi(u)=F(e^{au})$ раціон. ф-ія отъ e^{au}, она тоже будетъ раціон. ф-іей отъ e^{au+b} или отъ $\varphi(u)$ и пусть $u_2 = \frac{u_1+u_3}{2}$, тогда

$$\psi(u_1)=F(e^{au_1}),\ \psi(u_2)=F(e^{au_2}),\ \psi(u_3)=F(e^{au_3})$$ и

$$e^{au_1}\cdot e^{au_3}=(e^{au_2})^2.$$

Исключивъ e^{au_1}, e^{au_2} и e^{au_3}, получимъ алгебраич.

зависимость

$$G[\psi(u_1), \psi(u_2), \psi(u_3)] = 0.$$

Положим

$$u + v = u' + v';$$

то имеют место ур—ія

$$G\left[\psi(u), \psi(v), \psi\left(\frac{u+v}{2}\right)\right] = 0$$

$$G\left[\psi(u'), \psi(v'), \psi\left(\frac{u+v}{2}\right)\right] = 0,$$

или, исключив $\psi\left(\frac{u+v}{2}\right)$,

$$G_1[\psi(u), \psi(v), \psi(u'), \psi(v')] = 0.$$

Взяв $u' = 0$, получим теорему сложенія (2) в видѣ

$$G_1[\psi(u), \psi(v), \psi(u+v)] = 0.$$

Далѣе

$$\psi'(u) = a\, e^{au} F'(e^{au}), \quad \psi(u) = F(e^{au});$$

по исключеніи e^{au}, найдем алгебраич. зависимость

$$G[\psi(u), \psi'(u)] = 0,$$

чѣмъ доказывается свойство (3).

Пусть s дано и надо найти u такъ, чтобы

$$\psi(u) = F(e^{au}) = s.$$

Если F — $m^{ой}$ степени относит. e^{au}, то оно имѣетъ m корней вообще

$$e^{au} = s_1,\ e^{au} = s_2, \dots\ e^{au} = s_m.$$

Пусть рѣшенія этихъ ур-ій: $u_1, u_2, u_3 \dots u_m$;

$u = u_1 + 2n_1\omega,\ u_2 + 2n_2\omega, \dots, u_m + 2n_m\omega$ (гдѣ $\omega = \frac{\pi i}{a}$)

$n_1, n_2, \dots n_m$ положит. или отрицат. цѣлыя числа.

Слѣд. $\psi(u)$ період. ф-ія с періодомъ $2\omega = \frac{2\pi i}{a}$, это свойство (4).

Къ этому классу принадл. тригонометр. ф-іи

$$\cos u = \frac{1}{2}(e^{ui} + e^{-ui})$$

$$[\cos(u+v) - \cos u \cos v]^2 = (1-\cos^2 u)(1-\cos^2 v)$$

періодъ $2\omega = \frac{2\pi i}{i} = 2\pi$; $(a = i)$

Можно предложить себѣ вопросъ, какія ф-іи удовлетворяютъ ~~свс~~свойству (2), т. е. существуетъ ур-іе алгебраическое

$$\mathfrak{F}[\varphi(u_1), \varphi(u_2), \varphi(u_3)] = 0, \text{ при } u_2 = \frac{u_1+u_3}{2}.$$

Пусть $\varphi(u)$ ~~а~~ аналит. ф-ія, опредѣл. рядомъ

$$\varphi(u(a) = A_0 + A_1(u-a) + A_2(u-a)^2 + \ldots\ldots$$

Можно положить A_1 не $= 0$, если бы $A_1 = 0$, то разложеній можно бы разложить по степенямъ $u-a'$, гдѣ a' мало отлич. отъ a и коэф. при $(u-a')$ не $= 0$

Пусть $u_2 = \frac{u_1+u_3}{2}$ и пусть u_1, u_3 находятся въ предѣлахъ сходимости ряда.

I $\varphi(u_1) - A_0 = A_1(u_1-a) + A_2(u_1-a)^2 + \ldots\ldots$

II $\varphi(u_2) - A_0 = A_1(u_2-a) + A_2(u_2-a)^2 + \ldots\ldots\ldots$

III $\varphi(u_3) - A_0 = A_1(u_3-a) + A_2(u_3-a)^2 + \ldots\ldots$

Изъ I и III можно получить

$$u_1 - a = \frac{1}{A_1}(\varphi(u_1) - A_0) + \ldots = P(\varphi(u_1) - A_0)$$

$u_3 - a = \frac{1}{A_1}(\varphi(u_3) - A_0) + \ldots = \mathfrak{P}(\varphi(u_3) - A_0)$

(знак $\mathfrak{P}(x)$ означает ряд, расположенный по степеням x)

Следов. $\frac{u_1 + u_3}{2} - a = u_2 - a = \frac{1}{2}\{\mathfrak{P}(\varphi(u_1) - A_0) + \mathfrak{P}(\varphi(u_3) - A_0)\}$

Подставив это значение $u_2 - a$ в $\underline{II}$, найдем зависимость между $\varphi(u_1)$, $\varphi(u_2)$ и $\varphi(u_3)$. Надо определить φ так, чтоб эта зависимость была алгебраич. ур-ием.

Взяв вместо $\underline{u}$ аргумен $v = u - a$, и положив $\psi(v) = \varphi(a + v)$, найдем ф-ю, определенную для окрестности полевой точки или вокруг полевой точки. Если φ — искомая ф-ия, то должно иметь место алгебр. ур-ие

$$G[\psi(v_1), \psi(v_2), \psi(v_3)] = 0, \quad v_2 = \frac{v_1 + v_3}{2}$$

Взяв $v_1 + v_3 = v_1' + v_3'$, найдем

$$G_1[\psi(v_1), \psi(v_3), \psi(v_1'), \psi(v_3')] = 0$$

или при $v_1' = 0$

$$G_2\left[\varphi(v_1), \varphi(v_3), \varphi(v_1+v_3)\right] = 0$$

φ будет иметь теорему сложенія.

Ф-ія φ должна быть однозначною. Многія многозначныя ф-іи имеютъ теорему сложенія. Пусть имѣемъ алгебр. ур-іе степ. $\underline{m}$:

$$G\left[\varphi(u), e^{au}\right] = 0$$

$\varphi(u)$ — m-значная ф-ія отъ e^{au}. Исключивъ e^{au} и e^{av} изъ ур-ій

$$G\left[\varphi(u), e^{au}\right] = 0, \; G\left[\varphi(v), e^{av}\right] = 0, \; G\left(\varphi(u+v), e^{au}\cdot e^{av}\right) = 0,$$

получимъ для $\varphi(u)$ теорему сложенія.

Пусть между $\varphi(u)$, $\varphi(v)$ и $\varphi(u+v)$ существуетъ алгебр. зависимость

$$\text{I} \quad G(x, y, z) = 0,$$

гдѣ $x = \varphi(u)$, $y = \varphi(v)$, $z = \varphi(u+v)$

$$\frac{\partial G}{\partial x}\cdot\frac{dx}{du} + \frac{\partial G}{\partial z}\cdot\frac{dz}{du} = 0; \quad \frac{\partial G}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dv} + \frac{\partial G}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial v} = 0,$$

или, замѣтивъ, что $\frac{\partial z}{du} = \frac{\partial z}{\partial v}$,

II $\frac{\partial G}{\partial x}\cdot\frac{dx}{du} - \frac{\partial G}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dv} = 0.$

Исключив z из ур-ий I и II, получим

III $G_1\left(x, y, \frac{dx}{du}, \frac{dy}{dv}\right) = 0.$

Положив v пост., найдем алгебр. зависимость между x и $\frac{dx}{du}$. Если бы при этом получилось тождество, то в

$$G_1 = \sum_{\varkappa,\mu} A_{\varkappa\mu}\, x^{\varkappa} \left(\frac{dx}{du}\right)^{\mu}$$

каждый коэфф. $A_{\varkappa\mu} = 0$, это и будет алгебр. зависим. между y и $\frac{dy}{dv}$.

Пусть из ур-ий II z получается в виде рациональной ф-ии от $x, y, \frac{dx}{du}, \frac{dy}{dv}$. Что это возможно, можно дать примеры для cosin:

$z = xy - \frac{dx}{du}\cdot\frac{dy}{dv}$, для sin: $z = x\frac{dy}{dv} + y\frac{dx}{du}$.

Итак пусть

$$z = F\left(x, y, \frac{dx}{du}, \frac{dy}{dv}\right),$$

где F — знак рацион. ф-ии, или

$$\varphi(u+v) = F[\varphi(u), \varphi(v), \varphi'(u), \varphi'(v)].$$

Пусть ф-ія $\varphi(u)$ опред. рядом, сходящимся при $|u|<r$. Ряды φ и φ' должны удовлетворять предыдущее ур-іе, если $|u|<\frac{r}{2}$, $|v|<\frac{r}{2}$ при $v=u$

$$\varphi(2u)=F_1[\varphi(u),\varphi'(u)],\text{ гдѣ } u<\frac{r}{2},$$

или $\varphi(u)=F_1\left[\varphi\left(\frac{u}{2}\right),\varphi'\left(\frac{u}{2}\right)\right]$, гдѣ $u<r$.

$\varphi(u)$ представлена в видѣ [illegible] рядов, кот. рад. сходимости r, если вм. $\varphi\left(\frac{u}{2}\right)$ и $\varphi'\left(\frac{u}{2}\right)$ подставим их разложенія в ряд, получим

$$\varphi=\frac{f(u)}{g(u)},\text{ откуда } \varphi\left(\frac{u}{2}\right)=\frac{f\left(\frac{u}{2}\right)}{g\left(\frac{u}{2}\right)},\ \varphi'\left(\frac{u}{2}\right)=\frac{g\left(\frac{u}{2}\right)f'\left(\frac{u}{2}\right)-f\left(\frac{u}{2}\right)g'\left(\frac{u}{2}\right)}{g^2\left(\frac{u}{2}\right)}$$

Подставив эти ряды в ф-ію F, найдем

$$\varphi(u)=\frac{f_1(u)}{g_1(u)},\text{ гдѣ } \left|\frac{u}{2}\right|<r,\text{ или } |u|<2r.$$

Отсюда найдем $\varphi\left(\frac{u}{2}\right)$ и $\varphi'\left(\frac{u}{2}\right)$ для $\frac{u}{2}<2r$ и подставив в F_1, получим

$$\varphi(u)=\frac{f_2(u)}{g_2(u)},\text{ гдѣ уже } |u|<4r$$

и т. д.; наконец получим

$$\varphi(u) = \frac{f_n(u)}{g_n(u)}, \text{ где } |u| < 2^n \cdot r \ldots$$

n — может быть сколь угодно велико, поэтому $\varphi(u)$ может быть представлена, как частное двух рядов с бесконечно большим радиусом сходимости.

Все эти дроби $\frac{f_k(u)}{g_k(u)}, \frac{f_e(u)}{g_e(u)}$ равняются ряду $\varphi(u)$, первоначально заданному при $|u| < r$; при этом

$$\frac{f_k(u)}{g_k(u)} = \frac{f_e(u)}{g_e(u)} \text{ или } f_k(u)\cdot g_e(u) = f_e(u)\cdot g_k(u)$$

Это равенство имеет место для всех $\underline{u}$, для которых $|u| < r$, ряды в обеих частях равенства тождественны; поэтому дроби $\frac{f_k(u)}{g_k(u)} - \frac{f_e(u)}{g_e(u)}$ в их общем круге сходимости.

Первоначально определенная ф-ия $\varphi(u)$ для значений $\underline{u}$, мод. которых $< r$, может быть расширена, если для знач. $|u| > r$ придавать ей те значения, которые принимает [illegible]

дроби $\frac{F(u)}{G(u)}$, числитель и знаменатель к[отор]ой ряды с бесконечно большим кругом сходимости, где

$$\varphi(u) = \frac{F(u)}{G(u)}.$$

Если $\underline{a}$ конечное значение $\underline{u}$, то F и G можно расположить по степеням $(u-a)$

$$\varphi(u) = \frac{P_1(u|a)}{P(u|a)}$$

$\varphi(u)$ не будет иметь определенного значения, если в знам. низшая степень $(u-a) >$, чем в числит., т.е.

$$\varphi(u) = (u-a)^{-m} \frac{P_1'(u|a)}{P'(u|a)},$$

где P_1' и P' не обращ. в нуль при $\underline{u} = \underline{a}$, $\underline{m} > 0$. Ф-ия φ может иметь в конечном протяжении от любой точки бесконечные значения, но первого рода (ausserwesentliche singuläre Stelle) [т.е. такая бесконечность], кот. может быть уничтожена умножением ...

нѣкоторую степень $(u-a)$, в этом случ. на $(u-a)^m$]. . . . .

Для первоначально опредѣленной ф-іи имѣло мѣсто ур-іе

$$\varphi(u+v) = \mathfrak{F}(\varphi u, \varphi v, \varphi' u, \varphi' v) = \frac{\mathfrak{G}_1(\varphi u, \varphi v, \varphi' u, \varphi' v)}{\mathfrak{G}_2(\varphi u, \varphi v, \varphi'(u), \varphi' v)}$$

Расширенная ф-ія $\varphi(u) = \frac{\mathfrak{F}(u)}{\mathfrak{G}(u)}$ совпадаетъ съ $\varphi(u)$, для $|u| < r$. Поэтому внизу (слѣва) ур-іе

$$\mathfrak{F}(u+v)\cdot\mathfrak{G}_2 - \mathfrak{G}(u+v)\cdot\mathfrak{G}_1 = 0,$$

если mod. $(u+v) < r$; ~~это~~ ур-іе должно быть тождественно $=0$, поэтому оно имѣетъ мѣсто и при $|u+v| > r$.

Надо теперь изслѣдовать, будетъ ли ф-ія $\varphi(u)$ періодична, т. е. существуетъ ли P, чтобы

$$\varphi(u+P) = \varphi(u) \ldots\ldots\ldots$$

Здѣсь является вопросъ: дана (трансцендентная) ф-ія $f(u)$, какъ частное двухъ постоянно сходящихся рядовъ; опредѣлить при какихъ . . .

всех значений u, $f(u) = b$." Можно доказать, что, если при заданном b u имеет n значений, то в бесконечно малой окрестности b существует точка b', для кот. u имеет больше n значений.

Сначала докажем теорему. Если из плоскости значений u исключить довольно большую, но конечную часть, то вне последней будут значения u, при которых $f(u)$ больше всякой наперед заданной величины.

Во первых, пусть $f(u)$ имеет бесчисленное множество бесконечностей первого рода. Внутри замкнутой области их конечное число, поэтому вне ее будет бесконечное число их; а одна из [illegible]

Для точек в окрестности a, $f(u)$ представ. в виде
$$f(u) = (u-a)^{-m} \varphi(u-a)$$
$f(u)$ как угодно велико близ a.

Во вторых, пусть ф-ія не имеет бесконечностей на всей плоск. Она представ. тогда в виде постоянно сходящ. ряда
$$f(u) = A_\mu u^\mu + A_{\mu+1} u^{\mu+1} + \dots$$
гдѣ μ может $= 0$. Пусть для всех значеній u, mod. которых $= r$, maxim. $|f(u)| = g$, тогда, как извѣстно,
$$|A_n| \leq g r^{-n}.$$
Если бы для большихъ r, g оставалось бы меньше нѣкоторой величины, то должно было бы быть $A_n = 0$, т. е. $f(u)$ равнялось бы постоянной. Слѣд., для больших r, $|f(u)|$ как угодно велико.

В-третьих, пусть ф-ія имеет конечное число бесконечных точек и a одна из них и т. д.

$f(u,a) = (u-a)^{m}\varphi(u/a) = F(u,a) + \varphi_1(u/a)$,

гдѣ $F(u,a)$ содержитъ членовъ съ отрицательными показателями въ точкѣ $u=a$, ф-iя $f(u,a) - F(u,a)$ будетъ конечна.

Пусть всѣ безконечныя точки будутъ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$

$$f_1(u) = f(u) - F_1(u,a_1) - F_2(u,a_2) - \dots - F_n(u,a_n)$$

ф-iя $f_1(u)$ не имѣетъ безконечныхъ точекъ; поэтому, какъ показано въ случаѣ [illegible], она принимаетъ какъ угодно большiя значенiя при весьма большомъ u, ф-iи F_1, F_2, ... F_n, какъ содержащiя только отрицат. степени u принимаютъ при этомъ весьма малыя значенiя, слѣд. $f(u)$ можетъ быть какъ угодно велико.

Сказанное примѣнимо къ ф-iи $f(u) - b$, т.е. она какъ угодно велика для нѣкоторыхъ

точек всей замкнутой области, слѣд. $f(u)$ не может быть однако какъ угодно мало, будетъ оно равно нулю, это неизвѣстно. Для нѣкотораго $\underline{u_1}$ $\underline{f(u_1)=b_1}$, гдѣ $\underline{b_1}$ какъ угодно близко къ $\underline{b}$; b_1 ... внутри круга, описаннаго какъ угодно малымъ радіусомъ около b. Можно найти u_2 вблизи u_1 т. к., что $f(u_2)=b_2$, гдѣ $\underline{b_2}$ вблизи $\underline{b_1}$ и лежитъ внутри весьма малаго круга, описаннаго около b_1.

$$f(u_2)-f(u_1)=f^{(\mu)}(u_1)\frac{(u_2-u_1)^\mu}{\mu!}+\cdots$$

обернувъ этотъ р. д. получимъ

$$u_2-u_1=\varphi\left[(f(u_2)-f(u_1))^{\frac{1}{\mu}}\right]=\varphi\left[(b_2-b_1)^{\frac{1}{\mu}}\right],$$

откуда найдемъ u_2. Около u_1 опишемъ кругъ весьма малаго радіуса; внѣ его будетъ по крайней мѣрѣ одна точка u', для к-рой $f(u')=b_2$, гдѣ $\underline{b_2}$ какъ угодно близко къ $\underline{b_1}$. Вблизи u_1 можно найти $\underline{u_2}$ т. к., что $f(u_2)=b_2$. И т. к.

лые имеем двѣ точки u' и u_2, для

кот[орых] f имеет) тоже значенія:

Пусть, продолжая р[ассу]ж[деніе] далѣе, мы

нашли

$f(u_1)=b_1,\ f(u_2)=b_2,\ f(u_3)=b_3, \dots f(u_n)=b_n$

гдѣ b_1 меньше величины b. Въ области величины

u, за исключеніем окрестност[ей] точек

$u_1, u_2, \dots u_n$, найдется по крайней

мѣрѣ одна точка u'_{n+1}, для к[отор]ой $f(u'_{n+1})=b_2$,

гдѣ b_2 больше b_1.

По доказанному можно найти в окрестно-

стях $u_1, u_2 \dots u_n$ такія точки $u_1', u_2', \dots u_n'$, что

$f(u_1')=b_2,\ f(u_2')=b_2, \dots f(u_n')=b_2$, да кромѣ того

$f(u'_{n+1})=b_2$, чѣм обнаруживается теорема,

высказанная на страницѣ 13.

Ур-іе $f(u)=b$ может быть удовлетворено

конечным значеніем величины u, но [illegible]

найдется точка b', котрй соотв[ет]ствуют
[сколь]кое угодно большое число значений u.
Теперь можем перейти к разысканию
однозначных ф-ий, имеющих теорему
сложения. Пусть для $\varphi(u)$

$$G[\varphi(u+v), \varphi(u), \varphi(v)] = 0$$

и пусть это ур-ие $n^{\text{ной}}$ степени относительно
$\varphi(u+v)$. Ф-ия $\varphi(v)$ может быть рациональною и
пусть $\varphi(v_1)=b, \varphi(v_2)=b, \dots \varphi(v_{n+1})=b$ и

$$G[\varphi(u+v_\mu), \varphi(u), b] = 0, \text{ гдѣ } \mu = 1, 2, 3, \dots n+1$$

Это ур-ие удовлетворяется при всяком u,
$n+1$ значеніем $\varphi(u+v_\mu)$, тогда как оно $n^{\text{ной}}$ степени
относительно $\varphi(u+v)$. Поэтому 2 корня
должны быть равны, т.к. два равные корня
не могут быть различные при разных значе-
ніях u. Можно доказать, что для
нѣкотораго u и v

$$\varphi(u+v_\mu)=\varphi(u+v_\nu)$$

при всяком u. (ν тоже равно 1, 2, 3, ..., $n+1$).

Т.к. как $\varphi(v_\mu)$ конечно (оно $=b$), то $\varphi(u+v_\mu)$ и $\varphi(u+v_\nu)$ для малых значений u разлагаются в ряд по степеням u. (В результате) получ.

$$\varphi(u+v_\nu)-\varphi(u+v_\mu)=A_{\mu\nu}+A'_{\mu\nu}u+A''_{\mu\nu}u^2+\ldots$$

Если не все коэфф. $=0$, и $A_{\mu\nu}$ не $=0$, то для некоторого u, mod. кот. < некоторого δ, разность не $=0$. Если же $A_{\mu\nu}=0$, то равенство имеет вид

$$\varphi(u+v_\nu)-\varphi(u+v_\mu)=u^\lambda(A^{(\lambda)}_{\mu\nu}+A^{(\lambda+1)}_{\mu\nu}u+\ldots)$$

Эта разность тоже не обращается в нуль для значений u < некоторого δ и не $=0$. Составим произведение

$$\Pi\left[\varphi(u+v_\nu)-\varphi(u+v_\mu)\right]$$

Если бы не все коэфф. одной из разностей $=0$, то для некоторого u произведение

не относительно $= 0$, между тѣмъ два корня ур-iя $\vartheta = 0$ должны быть равны при всякомъ u. Слѣд. для нѣкотораго μ и ν разность $\varphi(u+v_\nu)-\varphi(u+v_\mu)$ имѣетъ всѣ коэфф. при u равные нулю. Поэтому при всякомъ u

$$\varphi(u+v_\nu)-\varphi(u+v_\mu)=0$$

Подставивъ $u-v_\mu$ вм. u, получимъ, что для всякаго u $\quad \varphi(u+v_\nu-v_\mu)=\varphi(u)$, т. е.

ф-iя $\varphi(u)$ періодическая.

Скажемъ нѣсколько словъ о періодическихъ функціяхъ вообще. Пусть ф-iя $\varphi(u)$ имѣетъ періодъ P,

$$\varphi(u+P)=\varphi(u)$$

Возьмемъ $u-P$ вмѣсто u

$$\varphi(u-P)=\varphi(u)$$

Повторивъ нѣсколько разъ эту подстановку, найдемъ

$$\varphi(u+nP)=\varphi(u)$$

гдѣ n положительное или отрицат. цѣлое число.

Если бы функція имѣла періоды $P_1, P_2, P_3, \dots P_n$ то были бы періоды $\mu_1 P_1 + \mu_2 P_2 + \dots + \mu_n P_n$, гдѣ $\mu_1, \mu_2, \dots \mu_n$ какія угодно цѣлыя числа.

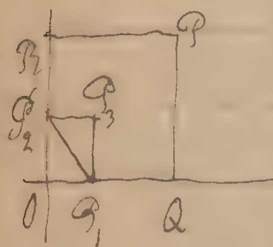
Докажемъ теорему, что болѣе двухъ періодовъ быть не можетъ. Періоды величины конечныя.

$$\varphi(u+v) = \varphi(u) + v\left\{\varphi'(u) + \varphi''(u)\frac{v}{2} + \cdots\cdots\right\}$$

Пусть u выбрано такъ, что $\varphi'(u)$ не $= 0$, тогда при $|v| <$ нѣкотораго g, выраженіе въ скобкахъ не равно нулю и потому $\varphi(u+v)$ не $= \varphi(u)$, если $|v| < g$.

Это значитъ, что въ нѣкоторомъ конечномъ отдаленіи отъ нулевой точки нѣтъ періодическихъ точекъ. Раздѣлимъ плоскость двумя системами параллельныхъ линій, на такія малыя части, чтобы въ четырехъ параллелограммахъ, окружающихъ нулевую точку не было періодическихъ точекъ. Можно показать, что въ каждомъ изъ паралл. не можетъ быть болѣе одной періодической точки.

Пусть въ одномъ изъ нихъ 2 період. точки Φ_1 и Φ_2, тогда $\Phi_1-\Phi_2$ будетъ тоже періодъ, эта-же разность есть точка Φ_3, лежащая въ одномъ изъ четырехъ параллелограммовъ, окружающихъ O, чего по предположенію быть не можетъ. Слѣд. всякій конечный, замкнутый контуръ заключаетъ только конечное число періодическихъ точекъ. Если вообще есть періодическія точки, то на одной изъ прямыхъ, выходящихъ изъ O, будетъ одна точка ближайшая къ O, назовемъ ее Φ_1. Пусть имѣется еще періодическая точка Φ'. Въ треуг. $O\Phi_1\Phi'$ можетъ быть только конечное число, одна изъ нихъ Φ_2 будетъ ближайшею къ $O\Phi_1$, такъ что въ треугольникѣ $O\Phi_1\Phi_2$ никакихъ нѣтъ періодическихъ точекъ. Построимъ точку



$\Phi_3=\Phi_1+\Phi_2$. Въ $\Delta\,\Phi_1\Phi_2\Phi_3$ не можетъ быть період. точекъ. Если Q были таковой, то и въ тр. $O\Phi_1\Phi_2$ была бы тоже періодическая точка $Q'=\Phi_3-Q$, чего быть не можетъ. Слѣд. въ парал. $O\Phi_1\Phi_3\Phi_2$ нѣтъ

періодическій можетъ. Пусть имѣетъ періодъ потому $\mathcal{P} = Q + R$, $\frac{Q}{P_1} = \xi_1$, $\frac{R}{P_2} = \xi_2$, гдѣ ξ_1, ξ_2 величины дѣйствительныя.

Пусть $\xi_1 = \mu_1 + \xi_1'$, $\xi_2 = \mu_2 + \xi_2'$

гдѣ μ_1, μ_2 положительныя или отрицательныя цѣлыя числа, а ξ_1' и ξ_2' положительныя правильныя дроби. Тогда $\mathcal{P} = \mu_1 P_1 + \mu_2 P_2 + \xi_1' P_1 + \xi_2' P_2$, но $\mu_1 P_1 + \mu_2 P_2$ періодъ, слѣд. и $\xi_1' P_1 + \xi_2' P_2$ тоже періодъ. Но это послѣднее изображаетъ точку внутри паралл. $O P_1 P_3 P_2$. Слѣд. $\xi_1' = 0$, $\xi_2' = 0$ и періоды точки $\mathcal{P}$ имѣютъ форму $\mu_1 P_1 + \mu_2 P_2$, гдѣ μ_1 и μ_2 какія угодно цѣлыя числа. Если нѣтъ элементарнаго періода P_2, то функція просто періодическая и имѣетъ періодъ $\mathcal{P} = \mu_1 P_1$.

Эту теорему доказательство можно перевести на алгебраическій языкъ. Пусть A и B двѣ величины, отношеніе которыхъ величина мнимая и пусть

$A = a + a'i$, $B = b + b'i$ и $ab' - a'b$ не $= 0$.

Всякая другая комплексная величина C можетъ

быть представлено въ видѣ $C = c + c'i = \alpha A + \beta B$, гдѣ α и β величины дѣйствительныя и опредѣляемыя изъ ур-iй $c = \alpha a + \beta b$, $c' = \alpha a' + \beta b'$.

Докажемъ сначала, что въ конечной области конечное число періодовъ. Разсмотримъ такія точки C, чтобы α принимало всѣ значенія отъ $-g$ до $+g$ и β тоже. Здѣсь g выбирается такъ велико, чтобы охватить всю внутреннюю область. Эту послѣднюю разобьемъ на части такъ, чтобы въ каждой изъ нихъ α заключалось между $\frac{\mu g}{n}$ и $\frac{(\mu+1)g}{n}$

β — " — $\frac{\nu g}{n}$ и $\frac{(\nu+1)g}{n}$

гдѣ μ и ν цѣлыя числа отъ $-n$, до $(n-1)$, всего подраздѣленій будетъ $4n^2$; и такое большое цѣлое и положит. число что въ четырехъ отдѣленіяхъ, въ которыхъ: ......

$$\begin{cases} \alpha = -\frac{g}{n} \cdots 0 \\ \beta = -\frac{g}{n} \cdots 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = -\frac{g}{n} \cdots 0 \\ \beta = 0 \cdots +\frac{g}{n} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = 0 \cdots +\frac{g}{n} \\ \beta = -\frac{g}{n} \cdots 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = 0 \cdots +\frac{g}{n} \\ \beta = 0 \cdots +\frac{g}{n} \end{cases}$$

не заключалось бы ни одного періода. Предположимъ, что въ одномъ изъ ~~нихъ~~ прочихъ подраздѣленій 2 періода

$$\Phi' = \alpha' A + \beta' B \quad \text{и} \quad \Phi'' = \alpha'' A + \beta'' B$$

Тогда былъ бы періодъ $\Phi = \Phi'' - \Phi' = (\alpha'' - \alpha')A + (\beta'' - \beta')B$

гдѣ $\alpha = \alpha'' - \alpha'$ заключается между $-\frac{q}{n}$ и $+\frac{q}{n}$

$\beta = \beta'' - \beta''$ ——— „ ——— „ ——— $-\frac{q}{n}$ и $+\frac{q}{n}$

Этотъ періодъ находился бы въ одномъ изъ вышеупомянутыхъ четырехъ подраздѣленій, что невозможно. Въ конечномъ контурѣ конечное число подраздѣленій и слѣд. конечное число періодовъ. Пусть Φ' періодъ, въ одномъ изъ періодовъ вида $\xi\Phi'$, ξ имѣетъ наименьшее положительное значеніе ξ_1, положимъ $\Phi_1 = \xi_1 \Phi'$. Всѣ періоды вида $\xi\Phi'$ могутъ быть представлены въ видѣ $\xi\Phi_1$, гдѣ ξ — цѣлое. Если бы $\xi = \mu_1 + \xi'$, гдѣ μ_1 — цѣлое число и ξ' лежитъ между 0 и 1, $\Phi = \mu_1\Phi + \xi'\Phi_1$, $\xi'\Phi_1$ было бы меньшимъ періодомъ, чѣмъ Φ_1, что невозможно, слѣд. $\xi' = 0$ и періодъ имѣетъ форму $\Phi = \mu_1 \Phi_1$.

Пусть имеется еще периодъ Φ', причемъ $\frac{\Phi'}{\Phi}$ величина комплексная. Всякій другой періодъ можетъ быть представленъ въ видѣ $\Phi = \alpha\Phi_1 + \beta\Phi'$, гдѣ α и β величины дѣйствительныя. Изъ всѣхъ періодовъ, въ которыхъ α между 0 и 1, одному соотвѣтствуетъ наименьшее положительное β, назовемъ этотъ періодъ Φ_2.

Можно будетъ Φ представить въ видѣ $\Phi = \xi\Phi_1 + \eta\Phi_2$;

пусть $\xi = \mu_1 + \xi'$, $\eta = \mu_2 + \eta'$; μ_1 и μ_2 цѣлыя числа; ξ', η' прав. дроби. $\Phi = \mu_1\Phi_1 + \mu_2\Phi_2 + \xi'\Phi_1 + \eta'\Phi_2$.

$\xi'\Phi_1 + \eta'\Phi_2$ будетъ періодъ, что невозможно, слѣд.

$\xi' = 0$, $\eta' = 0$ и $\Phi = \mu_1\Phi_1 + \mu_2\Phi_2$

Предложимъ теперь вопросъ, какую форму должна имѣть періодическая функція съ періодомъ 2ω. Одна изъ такихъ функцій $x = e^{\frac{u\pi i}{\omega}}$

Пусть имѣемъ еще одну однозначную функцію $\varphi(u)$ такую, что $\varphi(u + 2\omega) = \varphi(u)$

Каждому значенію $u + 2n\omega$ соотвѣтствуетъ опредѣленное

значеніе x и ф-іи $\varphi(u)$. Поэтому $\varphi(u)$ есть однозначная функція отъ x, назовемъ ее $f(x)$. Докажемъ, что $f(x)$ аналитическая ф-ія отъ x.

$$x = e^{\frac{\pi i}{\omega}u}, \quad x_0 = e^{\frac{\pi i}{\omega}u_0}$$

$$x - x_0 = e^{\frac{\pi i}{\omega}u_0}\left[e^{\frac{\pi i}{\omega}(u-u_0)} - 1\right] = Const\left[\frac{\pi i}{\omega}(u-u_0)+\cdots\right]$$

Такъ какъ коэфф. при $u-u_0$ не $=0$, то

$$u-u_0 = \mathfrak{P}(x-x_0) \quad \text{при } x \text{ близъ } x_0$$

$\varphi(u)$ аналитическая функція отъ u, поэтому она разл. въ рядъ по степенямъ $u-u_0$. При помощи только что полученнаго разложенія, найдемъ

$$f(x) = \mathfrak{P}_1(x-x_0).$$

Предѣлы для x: $x=0$ и $x=\infty$. Поэтому, на основаніи теоремы изъ теоріи аналит. функцій, $f(x)$ можетъ быть представлена въ видѣ

$$\varphi(u) = f(x) = \frac{G_1(x)-G_2(\frac{1}{x})}{G_3(x)-G_4(\frac{1}{x})} = \frac{\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} A_n x^n}{\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} B_n x^n} \quad \left[\text{гдѣ } x = e^{\frac{\pi i}{\omega}u}\right]$$

Можно доказать, что <u>если $f(x)$ трансцендентная ф-ія отъ x.</u>

то $\varphi(u)$ необходимо имѣетъ другой періодъ $2\omega'$, причемъ $\frac{\omega'}{\omega}$ величина комплексная, если $\varphi(u)$ имѣетъ теорему сложенія.

Не трудно доказать, что для x близкаго къ нулю или для весьма большаго x ф-ія $f(x)$ можетъ быть какъ угодно велика. Тоже справедливо и для функціи $\frac{1}{f(x)-b}$. Отсюда слѣдуетъ, что если ур-іе $f(x)=b$ удовлетворяется n значеніями x, то вблизи b существуетъ точка b', которой соотвѣтствуютъ $(n+1)$ значеній x.

Пусть для $\varphi(u)$ имѣетъ мѣсто теорема сложенія:

$$G\left(\varphi(u), \varphi(v), \varphi(u+v)\right)=0.$$

Это ур-іе положимъ $n^{ой}$ степени относительно $\varphi(u+v)$. Если $\varphi(u)=f(x)$ трансцендентная функція отъ x, то найдется такое b, чтобы

$$f(x_1)=b,\ f(x_2)=b, \ldots\ldots\ f(x_n)=b,\ f(x_{n+1})=b.$$

или $\varphi(u_1)=b,\ \varphi(u_2)=b, \ldots\ \varphi(u_n)=b,\ \varphi(u_{n+1})=b$

Разность $u_\mu - u_\nu$ не можетъ равняться кратному 2ω, т.к.

$$\frac{x_\mu}{x_\nu}=e^{\frac{(u_\mu-u_\nu)\pi i}{\omega}},\quad x_\mu \text{ не } = x_\nu$$

Должны быть удовлетворены ур-ія $G(b, \varphi(v), \varphi(u_\mu+v))=0$, $\mu=1,2,\dots,n+1$
Два корня этого ур-ія $\varphi(u_\mu+v)$ должны быть равны u, на основаніи разсужденій на стр. 13, для нѣкоторыхъ μ ν должно быть при всякомъ v

$$\varphi(v+u_\mu)=\varphi(v+u_\nu),\ \text{откуда}$$

$$\varphi(v+u_\mu-u_\nu)=\varphi(v)$$

$u_\mu-u_\nu$ не есть кратное 2ω. Слѣд. $\varphi(u)$ функція двояко-періодическая.

Отсюда вытекаетъ, если $\varphi(u)$ имѣетъ одинъ періодъ и теорему сложенія, что $\varphi(u)$ — непремѣнно раціональная ф-ія отъ $e^{\frac{\pi i}{\omega}u}$

Пусть $\varphi(u)$ двояко періодическая ф-ія, періоды назовемъ 2ω и $2\omega'$; (какъ мы видѣли, $\frac{\omega'}{\omega}$ величина комплексная). Всѣ значенія u вида:

$$u' = u_0+2\xi_1\omega+2\xi_1'\omega' \quad ; \ \xi_1, \xi_1' \text{ положит. прав. дроби}$$

выполняютъ нѣкоторый параллелограммъ, который назовемъ періодическимъ (Periodenparallelogramm). Пусть

$$u = u_0 + 2\xi\omega + 2\xi'\omega'$$

гдѣ $\xi = \nu + \xi_1$, $\xi' = \nu_1 + \xi_1'$; ν и ν_1 цѣлыя числа

$$u - u' = 2\nu\omega + 2\nu_1\omega$$

$\varphi(u)$ и $\varphi(u')$ имѣютъ равныя значенія. Назовемъ точки u и u' соотвѣтственными (congruent). Точка u_0 совершенно произвольна, можно положить $u_0=0$. Всѣ значенія, которыя вообще могутъ принять $\varphi(u)$, въ дѣйствительности имѣемъ внутри період. паралл., выходящаго изъ нулевой точки. Всякая аналит. ф-ія имѣетъ безконечныя и нулевыя точки. Онѣ должны найтись и внутри період. парал. Докажемъ, что порядокъ соотвѣтствующій нулевой или безконечной точкѣ въ каждомъ парал. одинъ и тотъ же.

Пусть a нулевая или безконечная точка порядка λ въ перв. парал.

$$\varphi(u/a) = (u-a)^{\pm\lambda}\left(A_0 + A_1(u-a) + \dots\right)$$

Пусть a' соотвѣт. точка въ любомъ изъ остальныхъ пар.

$a' = a + 2\nu\omega + 2\nu_1\omega'$

$\varphi(u|a') = \varphi(u|a + 2\nu\omega + 2\nu_1\omega') = \varphi(u - 2\nu\omega - 2\nu_1\omega'|a) = \varphi(u|a)$

Разложеніе по степенямъ $u-a'$ такое же, какъ и по степенямъ $u-a$. Поэтому точки a и a' нулевыя и безконечныя одного и того-же порядка.

Назовемъ $w = 2\nu\omega + 2\nu_1\omega'$

Обозначимъ $\sigma(u)$ такую двоякоперіодическую функцію, чтобы $\sigma(w) = 0$, причемъ нуль перваго порядка.

Тогда ф-ія

$$\varphi(u) = \frac{\sigma^{\lambda_1}(u-a_1)\,\sigma^{\lambda_2}(u-a_2)\ldots\sigma^{\lambda_r}(u-a_r)}{\sigma^{\mu_1}(u-b_1)\,\sigma^{\mu_2}(u-b_2)\ldots\sigma^{\mu_s}(u-b_s)}\, e^{g(u)}$$

будетъ имѣть нулевыя точки $a_1+w, a_2+w, \ldots a_r+w$ порядка $\lambda_1\ \lambda_2 \ldots \lambda_r$ и безконечныя точки $b_1+w, b_2+w, \ldots$ порядка $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_s$. Задача сводится къ разысканію такой $\sigma(u)$ и къ изученію ея свойствъ. Эту функцію можно представить въ видѣ безконечнаго произведенія подобно тому, какъ цѣлая ф-ія по заданнымъ кор-

нымъ представляется въ видѣ конечнаго произведенія.

Такъ напр. $f(x) = Cx^{\rho}\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{a_\nu}\right)$

каждый множитель $\left(1-\frac{x}{a_\nu}\right)$ повторенный столько разъ сколько единицъ въ порядкѣ нулевой точки. Функція $f(x)$ обращается въ нуль при $x=0, a_1, a_2, \ldots$ Но это представленіе имѣетъ мѣсто только тогда если рядъ $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{a_\nu}$ безусловно сходящійся. Найдемъ, что если рядъ $\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{m+1}$ безусловно сходящійся, то общій членъ произведенія

$$\left(1-\frac{x}{a_\nu}\right)e^{\frac{x}{a_\nu}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^3+\cdots+\frac{1}{m}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^m}$$

Ф-ія разлагается въ произведеніе первоначальныхъ ф-ій подобно тому, какъ число разлагается въ произведеніе простыхъ чиселъ.

Функціей первоначальной называется такая, которая имѣетъ одно безконечное и одно или ни одного нулевыхъ значеній. Напр.

$$\left(\frac{k}{x-\alpha}+l\right)e^{g\frac{1}{x-\alpha}}$$

или если это безконечное значение α уходитъ въ безконечность $(kx+l)e^{g(x)}$

Если $k=0$, то ф-ія не имѣетъ нулевой точки, если $l=0$, то нулевая точка при $x=0$. Всякая однозначная ф-ія съ одной безконечною точкой (mit einer singulären Stelle) представляется въ видѣ произведенія такихъ первичныхъ функцій съ одною-же безконечною. Достаточно принять $g(x)$ цѣлою ф-іею.

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{r=0}^{\infty} x^r=\frac{d}{dx}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{x^r}{r} \text{ для всѣхъ } |x|<1$$

Послѣ интегр-ія

$$1-x=e^{-\sum_{r=1}^{\infty}\frac{x^r}{r}}$$

Сдѣлаемъ обозначенія:

$$\mathcal{E}(x,0)=1-x$$
$$\mathcal{E}(x,1)=(1-x)e^{x}$$
$$\mathcal{E}(x,2)=(1-x)e^{\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\mathcal{E}(x,m)=(1-x)e^{\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\ldots+\frac{x^m}{m}}$$
$$\mathcal{E}(x,m)=(1-x)e^{\sum_{r=1}^{m}\frac{x^r}{r}}=e^{-\sum_{r=m+1}^{\infty}\frac{x^r}{r}}=e^{-\sum_{r=1}^{\infty}\frac{x^{m+r}}{m+r}} \text{ (для } |x|<1).$$

funkcja $\mathcal{E}(x,m)$ jest pierwotna i staje się 0 dla $x=1$, a nieskończoność tylko dla $x=\infty$.

$$\text{I}\quad \mathcal{E}\left(\frac{x}{a},m\right)=\left(1-\frac{x}{a}\right)e^{\sum_{\nu=1}^{m}\left(\frac{x}{a}\right)^{\nu}\frac{1}{\nu}}$$

jest także funkcja pierwotna, która staje się zerem dla $x=a$

Jeżeli $\left|\frac{x}{a}\right|<1$, to

$$\text{II}\quad \mathcal{E}\left(\frac{x}{a},m\right)=e^{-\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{m+\nu}\left(\frac{x}{a}\right)^{m+\nu}}$$

Niech będzie szereg wielkości $a_1\ a_2\ a_3$, których ilość skończona zawiera się w obrębie skończonym i nadto $\lim_{n=\infty}|a_n|=\infty$. Wieloczyn

$$\prod_{\nu}\mathcal{E}\left(\frac{x}{a_\nu},m_\nu\right)$$

będzie przedstawiać funkcyę, stającą się zerem w punktach oznaczonych z odpowiednią wielokrotnością, jeżeli tylko każdy czynnik $\mathcal{E}\left(\frac{x}{a_\nu},m_\nu\right)$ jest powtórzony odpowiednią ilość razy.

Każdej wartości a_ν dobrana jest liczba m_ν, żeby wieloczyn zbiegał się bezwarunkowo. Niech

$$|a_1|<|a_2|<|a_3|<\ldots\ldots<|a_n|<$$

zaczynając od pewnego a_n, $\left|\frac{x}{a_n}\right|<1$

$$\prod_{\nu}\mathcal{E}\left(\frac{x}{a_\nu},m_\nu\right)=\prod_{\nu=1}^{n}\mathcal{E}\left(\frac{x}{a_\nu},m_\nu\right)\cdot\prod_{\nu=n+1}^{\infty}\mathcal{E}\left(\frac{x}{a_\nu},m_\nu\right)$$

Ze wzoru II

$$\prod_{\nu=n+1}^{\infty} E\left(\frac{x}{a_\nu}, m_\nu\right) = e^{-\sum\limits_{\nu=n+1}^{\infty}\sum\limits_{\tau=1}^{\infty}\frac{1}{m_\nu+\tau}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^{m_\nu+\tau}}$$

Wykładnik przy e ma wartość skończoną, jeśli $\sum\limits_{\nu=n+1}^{\infty}\sum\limits_{\tau=1}^{\infty}\left|\frac{x}{a_\nu}\right|^{m_\nu+\tau}$ albo $=\sum\limits_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{1}{1-\left|\frac{x}{a_\nu}\right|}\left|\frac{x}{a_\nu}\right|^{m_\nu+1}$ jest zbieżny.

Ta suma zaś jest $< \frac{1}{1-k}\sum\limits_{\nu=n+1}^{\infty}\left|\frac{x}{a_\nu}\right|^{m_\nu+1}$, gdzie k największa z liczb $\left|\frac{x}{a_\nu}\right|$. Jest ona wielkość skończona, jeśli $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\left|\frac{x}{a_\nu}\right|^{m_\nu+1}$ jest skończona.

W każdym zwykłym przypadku można dobrać takie m_ν, żeby szereg był zbieżny; w ostateczności można założyć $m_1=0$, $m_2=1$, ... $m_\nu=\nu-1$. Wtedy otrzyma się szereg $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\left|\frac{x}{a_\nu}\right|^{\nu}$ napewno zbieżny, poczynając bowiem od pewnego wyrazu będzie $\left|\frac{x}{a_\nu}\right|<1$.

Można więc dobrać takie m_ν, żeby iloczyn $\prod\limits_{\nu} E\left(\frac{x}{a_\nu}, m_\nu\right)$ był bezwarunkowo zbieżny. Ponadto suma będzie

$$-\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\sum_{\tau=1}^{\infty}\frac{1}{m_\nu+\tau}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^{m_\nu+\tau} = -\mathfrak{P}(x, n+1)$$

jeśli uszykujemy ją podług x. Ten szereg $\mathfrak{P}$ będzie zbieżny, jeśli się weźmie $|x|$ mniejsze $|a_{n+1}|$, $|a_{n+2}|$, ... Biorąc więc $|x|$ mniejsze absol. wartości a_1 a_2... otrzymamy zbieżne szeregi $\mathfrak{P}(x,1)$, $\mathfrak{P}(x,2)$,...

$$-\mathcal{P}(x,1)+\mathcal{P}(x,n+1)=-\left\{\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\tau=1}^{\infty}\frac{1}{\tau+m_\nu}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^{m_\nu+\tau}-\sum_{\nu=n+1}\sum_{\tau=1}^{\infty}\frac{1}{\tau+m_\nu}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^{m_\nu+\tau}\right\}$$

$$=-\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\tau=1}^{\infty}\frac{1}{\tau+m_\nu}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^{m_\nu+\tau}$$

$$e^{-\mathcal{P}(x,1)+\mathcal{P}(x,n+1)}=e^{-\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\tau=1}^{\infty}\frac{1}{\tau+m_\nu}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^{m_\nu+\tau}}$$

albo ze wzoru II

$$\text{III}\qquad e^{-\mathcal{P}(x,1)}=\left\{\prod_{\nu=1}^{n}\mathcal{E}\left(\frac{x}{a_\nu},m_\nu\right)\right\}e^{-\mathcal{P}(x,n+1)}$$

ma to miejsce, jeśli $\left|\frac{x}{a_\nu}\right|<1$, $\nu=1,2,3,\ldots$

Rozwijając obydwie części wzoru III na szereg, mamy:

$$\text{IV}\qquad e^{-\mathcal{P}(x,1)}=1+B_1x+B_2x^2+\ldots\ldots \quad \text{dla } |x|<|a_1|,|a_2|,|a_3|,\ldots$$

$$e^{-\mathcal{P}(x,n)}=1+B_1^{(n)}+B_2^{(n)}x^2+\ldots\ldots \quad \text{dla } |x|<|a_{n+1}|,|a_{n+2}|,\ldots$$

Funkcye $\mathcal{E}\left(\frac{x}{a_\nu},m_\nu\right)$, a więc także iloczyny tych funkcyj rozwijają się na szeregi stale zbieżne. Stąd prawa strona wzoru III daje szereg

$$\text{V}\qquad 1+A_1x+A_2x^2+\ldots\ldots \quad \text{zbieżny, dla } \left|\frac{x}{a_\nu}\right|<1,\ \nu=n+1,n+2,\ldots$$

Obydwa szeregi III i V mają wartości jednakowe dla $|x|<|a_1|,|a_2|\ldots$ są więc tożsamościowe (t.j. o jednakowych spółczynnikach) i mają wartości jednakowe dla $|x|<|a_{n+1}|,|a_{n+2}|\ldots$

Tutaj n, a więc i a_{n+1} mogą być jakkolwiek wielkie liczby,

promień zbieżności szeregu V^{go} jest także jakkolwiek wielki, jest więc i szereg IV stale zbieżny, a zrównanie III ma miejsce dla każdej wartości x. Dla tego wielocyn:

$$\text{VI} \qquad f(x) = \left\{ \prod_{v=1}^{n} \mathcal{E}\left(\frac{x}{a_v}, m_v\right) e^{-R(x,n+1)} \right\}$$

rozwija się na szereg stale zbieżny t.j. $f(x)$ jest to ~~całkowita~~ funkcya całkowita, jednowartościowa.

Widzieliśmy, że

$$R(x,n+1) = \sum_{v=n+1}^{\infty} \sum_{z=0}^{\infty} \frac{1}{m_v+z} \left(\frac{x}{a_v}\right)^{m_v+z} < \frac{1}{1-K} \sum_{v=n+1}^{\infty} \left(\frac{x}{a_v}\right)^{m_v+1}$$

przy należycie wybranem m

$$\lim_{n=\infty} R(x, n+1) = 0$$

Więc $\quad f(x) = \prod_{v=1}^{\infty} \mathcal{E}\left(\frac{x}{a_v}, m_v\right)$

$f(x)$ rozwija się więc nie tylko na szereg stale zbieżny, lecz również i na wielocyn stale zbieżny. Jeżeli dla $x=0$, $f(x)=0$ wielokrotności μ, to $\quad f(x) = x^{\mu} \prod_{v=1}^{\infty} \mathcal{E}\left(\frac{x}{a_v}, m_v\right)$.

Ten wielocyn zarówno z szeregiem $R(x, n+1)$ nie tylko są zbieżne lecz nadto są jednostajnie zbieżne. Stąd wynika, że wzór powyższy można różniczkować (logarytmicznie)

$$\frac{d\log f(x)}{dx} = \frac{\mu}{x} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\mathcal{E}'\left(\frac{x}{a_\nu}, m_\nu\right)}{\mathcal{E}\left(\frac{x}{a_\nu}, m_\nu\right)}$$ albo:

$$\frac{d\log f(x)}{dx} = \frac{\mu}{x} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{x-a_\nu} + \frac{1}{a_\nu} + \frac{x}{a_\nu^2} + \dots + \frac{x^{m_\nu-1}}{a_\nu^{m_\nu}} \right\}$$

Można różniczkować wzór ten dowolną ilość razy, gdyż zawsze otrzymujemy po zróżniczkowaniu szereg jednostajnie i bezwarunkowo zbieżny. Czasami się zdarza, że $m_\nu >$ pewnego skończonego m. Po m-krotnem zróżniczkowaniu otrzymujemy:

$$\frac{d^{m+1}\log f(x)}{dx^{m+1}} = (-1)^m \mu \frac{m!}{x^{m+1}} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^m \lambda_\nu \frac{m!}{(x-a_\nu)^{m+1}}$$

gdzie λ_ν wyraża wielokrotność a_ν. Dla bezwarunkowej zbieżności tego szeregu wystarcza, żeby

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{m+1}$$

była bezwarunkowo zbieżna, co rzeczywiście częstokroć się zdarza. To m możemy wziąć zamiast m_ν.

Dla przykładu rozwiniemy na il. wieloczyn funkcyę $\sin x\pi$

$$\sin x\pi = x\pi \prod_{n=-\infty}^{+\infty}{}' \left(1-\frac{x}{n}\right) e^{g_n(x)}$$

Tu kreska położona u góry $\prod$ oznacza, że wyraz odpowiadający $n=0$ ma być opuszczony.

Trudność leży w wyznaczeniu funkcyi $g_n(x)$

Zróżniczkowawszy wzór ten logarytmowo, mamy:

$$\pi \operatorname{cotg} \pi x = \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' g_n'(x) + \frac{1}{x} + \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{x-n}$$

Różniczkując raz jeszcze, przychodzi

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi x} = -\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' g_n''(x) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{x-n}\right)^2$$

Zaprowadźmy oznaczenia:

$$s(x) = x \prod_{n=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right) e^{\frac{x}{n}}$$

$$s_1(x) = \frac{s'(x)}{s(x)} = \frac{1}{x} + \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \left\{ \frac{1}{x-n} + \frac{1}{n} \right\}$$

$$s_2(x) = -s_1'(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-n)^2}$$

Funkcya $s_2(x)$ ma okres 1, gdyż $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-n+1)^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-n)^2}$, t.j.

$$s_2(x+1) = s_2(x).$$

Jeżeli się podzieli płaszczyznę wartości x na pasy przez linie równoległe do osi η w odległości 1, to funkcya $s_2(x)$ ~~ma~~ będzie w każdym z nich przybierała te same wartości. Niech $x = \xi + \eta i$. Nie potrzebujemy nadawać ξ innych wartości jak między 0 i 1.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{(x-n)^2} \right| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\xi-n)^2+\eta^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\xi-n)^2+\eta^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\xi+n)^2+\eta^2}$$

Zważywszy, że dla dodatniego n

$$n - \xi > n - 1 \quad , \quad n + \xi > n$$

znachodzimy

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{(x-n)^2} \right| < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^2 + \eta^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+\eta^2} < \frac{2}{\eta^2} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+\eta^2}$$

$s_2(x)$ jest nieskończenie małe dla nieskończenie wielkiego η, gdyż da się to spostrzec w każdym pasie, na które podzielona została płaszczyzna. Tę samą własność posiada i funkcya $\frac{1}{\sin^2 x\pi}$, jak to daje się widzieć ze zrównania:

$$\frac{1}{\sin^2 x\pi} = \frac{4}{2 - e^{2x\pi i} - e^{-2x\pi i}} = \frac{4}{2 - e^{-2\eta\pi} e^{2\xi\pi i} - e^{2\eta\pi} e^{-2\xi\pi i}}$$

Obie funkcye $s_2(x)$ i $\frac{1}{\sin^2 x\pi}$ dla $x=0, x=1$ stają się nieskończenie wielkimi, pozostając jednakże skończonymi dla wartości pośrednich. Łatwo się przekonać, że różnica $\frac{\pi^2}{\sin^2 x\pi} - s_2(x)$ zawsze ma wartość skończoną. Rozwińmy $\frac{\pi}{\sin x\pi}$ na szereg $\frac{\pi}{\sin x\pi} = \frac{1}{x} + x\mathfrak{P}(x^2)$, skąd $\frac{\pi^2}{\sin^2 x\pi} = \frac{1}{x^2} + \mathfrak{P}(x^2)$

Funkcya $s_2(x)$ dla ξ, $0 \leqq |\xi| < 1$ daje się rozwinąć na szereg tegoż kształtu, w różnicy więc $\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi x} - s_2(x)$ wyraz $\frac{1}{x^2}$ zniszczy się, a sama różnica pozostanie skończoną dla wszystkich

wartości danego pasa, a więc i na całej płaszczyźnie. Taka zaś funkcya, która dla żadnej wartości na całej płaszczyzny nie staje się ∞ musi być ilością stałą. Nadto stała ta powinna być zerem, dla tego że przy $\eta=\infty$ obie funkcye stają się nieskończenie małymi. Stąd $\sum' g_n''(x) = 0$ i $s_2(x) = \frac{\pi^2}{\sin^2 x\pi}$.

Dalej $\sum' g_n'(x) = C$, i $s_1(x) + C = -\pi^2 \int \frac{dx}{\sin^2 x\pi} = \pi \operatorname{cotg} x\pi$

Stałą C daje się łatwo ~~oznacz~~ wyznaczyć

$$s_1(-x) = -\frac{1}{x} - \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \left(\frac{1}{x+n} - \frac{1}{n}\right)$$

Wyrazy sumy mają tożsame wartości, jeżeli się weźmie $\underline{-n}$ zamiast n

$$s_1(-x) = -\frac{1}{x} - \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \left(\frac{1}{x-n} + \frac{1}{n}\right) \quad \text{t.j.} \quad s_1(-x) = -s_1(x)$$

$s_1(x)$ jest funkcyą nieparzystą. Przedtem mieliśmy

$$s_1(x) + C = \pi \operatorname{cotg} x\pi \text{ , więc}$$

$$-s_1(x) + C = -\pi \operatorname{cotg} x\pi \quad \text{t.j.} \quad C = 0.$$

Tak więc $s_1(x) = \pi \operatorname{cotg} x\pi$.

Ze zrównania $s_1(x) = \frac{s'(x)}{s(x)}$ znachodzimy $s(x) = \frac{1}{\pi}\sin \pi x$, więc $g_n(x) = \frac{x}{n}$

Stąd wzory powyższe ukażą się w kształtach:

$$\pi S(x) = \sin x\pi = x\pi \prod_{n=-\infty}^{\infty}{}' \left(1-\frac{x}{n}\right) e^{\frac{x}{n}}$$

$$s_1(x) = \pi \operatorname{Cotg} x\pi = \frac{1}{x} + \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \left(\frac{1}{x-n} + \frac{1}{n}\right)$$

$$s_2(x) = \frac{\pi^2}{\sin^2 x\pi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-n)^2}$$

Mimochodem ustanowimy tu wzór jeden, który nam się z czasem przyda.

$$\frac{\sin x\pi}{\pi} = x - \frac{1}{3!}x^3\pi^2 + \frac{1}{5!}x^5\pi^4 + \cdots$$

Stąd $\left(\frac{\pi}{\sin x\pi}\right)^2 = x^{-2}\left(1 - \frac{1}{6}x^2\pi^2 + \frac{1}{5!}x^4\pi^4 - \cdots\right)^{-2} = x^{-2} + \frac{1}{3}\pi^2 + \cdots$

Z powyższego wzoru wynika:

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 x\pi} = x^{-2} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} + \cdots$$

więc $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Przechodzimy teraz do utworzenia funkcyi $\sigma(u)$, która staje się zerem rzędu 1^go dla $u=0$, $u=w$, gdzie $w=2\nu\omega+2\nu'\omega'$, a ν i ν' są liczby całkowite dodatnie lub odjemne.

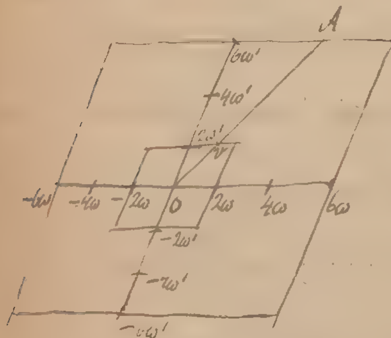
Funkcya $\sigma(u)$ ma kształt następujący:

$$\sigma(u) = u\prod_{w}{}' \left(1-\frac{u}{w}\right)e^{g_\lambda\left(\frac{u}{w}\right)}$$

gdzie znowu $g_\lambda\left(\frac{u}{w}\right)$ jest kształtu: $\frac{u}{w} + \frac{1}{2}\left(\frac{u}{w}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{u}{w}\right)^3 + \cdots + \frac{1}{m_\lambda}\left(\frac{u}{w}\right)^{m_\lambda}$.

Można przyjąć, że wszystkie m_λ równe są m, jeżeli szereg

$\sum_{w}\left|\frac{1}{w}\right|^{m+1}$ będzie bezwarunkowo zbieżny. Dowiedźmy, że $m=2$



Ze środka spółrzędnych poprowadźmy dwie linie proste, przechodzące przez punkty $\pm 2\omega, +4\omega, +6\omega,$. i przez punkty $\pm 2\omega'$, $\pm 4\omega'$,.... Przez 4 punkty $\pm 2r\omega$ i $\pm 2r\omega'$ (r całkowite dodatnie) linie równoległe do tamtych dwóch. Cała płaszczyzna rozebnie się w ten sposób na ~~prost~~ równoległoboki, otaczające punkt 0. Wyrazy szeregu $\sum\left(\frac{1}{w}\right)^{m+1}$ rozbijmy na grupy tak, żeby każda zawierała wszystkie w, odpowiadające tylko jednemu równoległobokowi (jedna jednemu, druga drugiemu itd). Wykreślmy równoległobok przez punkt $2\omega, 2\omega', -2\omega, -2\omega'$. Poprowadźmy z 0 linią OA do jednego z punktów w, położonego na boku równoległoboku, odpowiadającego pewnemu r. Odcinek tej linii zawarty ~~zawarty~~ we wnętrzu równoległoboku nazwijmy przez v. Wtedy mamy $w=rv$ i $|w|=r|v|$, $\left(\frac{1}{w}\right)^{m+1}=\frac{1}{r^{m+1}}\left|\frac{1}{v}\right|^{m+1}$

We wnętrzu małego równoległoboku będzie pewne (v) najmniejsze,

nazwijmy je przez v_0.

$$\left|\frac{1}{v}\right| < \frac{1}{v_0} \; ; \; \left|\frac{1}{w}\right|^{m+1} \leq \frac{1}{r^{m+1}}\left(\frac{1}{v_0}\right)^{m+1}$$

Na bokach większego równoległoboku ilość punktów w będzie: $4(2r+1)-4 = 8r$ i $\sum\left(\frac{1}{w}\right)^{m+1}$ rozciągnięte na te wszystkie $8r$ punktów będzie

$$\sum_r \left|\frac{1}{w}\right|^{m+1} \leq \frac{8}{r^m}\left(\frac{1}{v_0}\right)^{m+1}$$

Więc suma cała

$$\sum_w \left|\frac{1}{w}\right|^{m+1} \leq 8\left(\frac{1}{v_0}\right)^{m+1} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^m}$$

Wiadomo, że $\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{1}{r}\right)^m$ dla $m=2$ zbiega się bezwarunkowo

Będzie więc $\sigma(u)$ miała kształt następujący:

$$\sigma(u) = u\prod_w{}'\left(1-\frac{u}{w}\right)e^{\frac{u}{w}+\frac{1}{2}\left(\frac{u}{w}\right)^2}$$

$$w = 2\nu\omega + 2\nu'\omega'$$

W tym wzorze nadajmy najprzód w wszystkie te wartości, dla których $\nu'=0$. Będzie

$$\left(\sigma(u)\right)_{\nu'=0} = u\prod_\nu{}'\left(1-\frac{u}{2\nu\omega}\right)e^{\frac{u}{2\nu\omega}+\frac{1}{2}\left(\frac{u}{2\nu\omega}\right)^2}$$

Czynnik $\prod_\nu{}' e^{\frac{1}{2}\left(\frac{u}{2\nu\omega}\right)^2}$ ma wartość skończoną, gdyż

$$\prod_\nu{}' e^{\frac{1}{2}\left(\frac{u}{2\nu\omega}\right)^2} = e^{\frac{1}{8}\frac{u^2}{\omega^2}\sum_{-\infty}^{\infty}{}'\frac{1}{\nu^2}} = e^{g\left(\frac{u}{2\omega}\right)^2}, \text{ a } g \text{ jest skończone.}$$

Stąd i drugi czynnik będzie skończony, można więc napisać:

$$(\sigma(u))_{\nu'=0} = e^{g\left(\frac{u}{2\omega}\right)^2} \; i \; \prod_{\nu}{}'\left(1-\frac{u}{2\nu\omega}\right) e^{\frac{u}{2\nu\omega}} = 2\omega\, e^{\eta\left(\frac{u}{2\omega}\right)^2} s\left(\frac{u}{2\omega}\right)$$

na mocy wzoru str. 31.

Najpierw teraz wyznaczmy $\sigma(u)$ dla pewnego $\nu'(=)0$, potem przemnożymy między sobą wszystkie te wyrażenia, nadając ν' wszystkie wartości od $-\infty$ do $+\infty$ za wyjątkiem zera, otrzymamy ostateczny wyraz na $\sigma(u)$.

$$(\sigma(u))_{\nu'(=)0} = \prod_{w}{}'\left(1-\frac{u}{2\nu\omega+2\nu'\omega'}\right) e^{\frac{u}{2\nu\omega+2\nu'\omega'}+\frac{1}{2}\left(\frac{u}{2\nu\omega+2\nu'\omega'}\right)^2} \quad (\nu'(=)0)$$

Drugi czynnik wyznaczy się osobno. Kreskę przy $\prod$ można odrzucić, gdyż $w(=)0$, dla wartości ν' ~~nie = 0~~ nierównych 0.

$$\prod e^{\frac{1}{2}\left(\frac{u}{2\nu\omega+2\nu'\omega'}\right)^2} = e^{\frac{1}{2}\sum_{\nu}\left(\frac{u}{2\nu\omega+2\nu'\omega'}\right)^2} = e^{\frac{1}{2}\left(\frac{u}{2\omega}\right)^2\sum\left(\frac{1}{\nu+\nu'\frac{\omega'}{\omega}}\right)^2} = e^{\frac{1}{2}\left(\frac{u}{2\omega}\right)^2 s_2\left(\frac{\nu'\omega'}{\omega}\right)}$$

Dla wyrażenia czynnika pierwszego przez funkcje $s(x)$, $s_1(x)$, $s_2(x)$ potrzeba przekształcić formułę $\prod\left(1-\frac{u}{n+a}\right)e^{\frac{u}{n+a}}$

Z określenia funkcji $s(x)$ wynika $s(u-a)=(u-a)\prod_{n}{}'\left(1-\frac{u-a}{n}\right)e^{\frac{u-a}{n}}$

Załóżmy $u=0$, a tymczasem pozostaje nieoznaczone

$$s(-a) = -a\prod_{n}{}'\left(1+\frac{a}{n}\right)e^{-\frac{a}{n}}$$

Dzieląc jedno przez drugie, otrzymujemy:

$$\frac{s(u-a)}{s(-a)} = \left(1-\frac{u}{a}\right)\prod_n{}'\left(1-\frac{u}{n+a}\right)e^{\frac{u}{n}}$$
$$= \left(1-\frac{u}{a}\right)\prod_n{}'\left(1-\frac{u}{n+a}\right)e^{\frac{u}{n+a}-u\left(\frac{1}{n+a}-\frac{1}{n}\right)}$$

Wieloczyn ... $\prod' e^{u\left(\frac{1}{-n-a}+\frac{1}{n}\right)}$ jest zbieżny. Istotnie z wyrażenia na $s_1(x)$, znajdziemy $s_1(-a) = -\frac{1}{a} + \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\left(\frac{1}{-n-a}+\frac{1}{n}\right)$. Więc $\prod' e^{u\left(\frac{1}{-n-a}+\frac{1}{n}\right)} = e^{u\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\left(\frac{1}{-n-a}+\frac{1}{n}\right)} = e^{\frac{u}{a}}e^{u s_1(-a)}$

Tu trzeba a założyć równem ilości niecałkowitej, gdyż inaczej jeden z wyrazów stanie się nieskończonością a suma utraci znaczenie.

$$\frac{s(u-a)}{s(-a)} = e^{u s_1(-a)}\left(1-\frac{u}{a}\right)\prod_n{}'\left(1-\frac{u}{n+a}\right)e^{\frac{u}{n+a}}, \text{ albo}$$
$$\frac{s(u-a)}{s(-a)} = e^{u s_1(-a)}\prod_n\left(1-\frac{u}{n+a}\right)e^{\frac{u}{n+a}}$$

Stąd, zważywszy parzystość $s(a)$ i nieparzystość $s_1(a)$, znajdziemy $\prod_n\left(1-\frac{u}{n+a}\right)e^{\frac{u}{n+a}} = e^{u s_1(a)}\frac{s(a-u)}{s(a)}$

Założmy $a = \frac{\nu'\omega'}{\omega}$, $u = \frac{u}{2\omega}$

$$\prod_\nu\left(1-\frac{u}{2\nu\omega+2\nu'\omega'}\right)e^{\frac{u}{2\nu\omega+2\nu'\omega'}} = \frac{s\left(\frac{\nu'\omega'}{\omega}-\frac{u}{2\omega}\right)}{s\left(\frac{\nu'\omega'}{\omega}\right)}e^{\frac{u}{2\omega}s_1\left(\frac{\nu'\omega'}{\omega}\right)}$$

Będzie więc dla ... pewnego $\nu'(=)0$

$$\left(\sigma(u)\right)_{\nu'=0} = e^{\frac{1}{2}\left(\frac{u}{2\omega}\right)^2 s_2\left(\frac{\nu'\omega'}{\omega}\right)}\frac{s\left(\frac{\nu'\omega'}{\omega}-\frac{u}{2\omega}\right)}{s\left(\frac{\nu'\omega'}{\omega}\right)}e^{\frac{u}{2\omega}s_1\left(\frac{\nu'\omega'}{\omega}\right)}$$

Tworząc z podobnych wszystkich wyrażeń wieloczyn

i łącząc wyrazy mające ν' i $-\nu'$, otrzymamy

$$\prod_{\nu'=-\infty}^{\nu'=\infty}\{\sigma(u)\}_{\nu(=)0} = e^{\frac{1}{2}\left(\frac{u}{2\omega}\right)^2\sum\limits_{\nu'=-\infty}^{\infty}{}' s_2\left(\frac{\nu'\omega'}{\omega}\right)}\prod_{\nu=1}^{\infty}\left\{\frac{s\left(\frac{\nu'\omega'}{\omega}-\frac{u}{2\omega}\right)}{s\left(\frac{\nu'\omega'}{\omega}\right)}\cdot\frac{s\left(\frac{\nu'\omega'}{\omega}+\frac{u}{2\omega}\right)}{s\left(\frac{\nu'\omega'}{\omega}\right)}\right\}^{\times},$$ gdyż

z powodu parzystości $s_1(x)$ jest $e^{\frac{u}{2\omega}s_1\left(\frac{\nu\omega'}{\omega}\right)+\frac{u}{2\omega}s_1\left(-\frac{\nu\omega'}{\omega}\right)} = e^0 = 1.$

Dla skrócenia oznaczmy $$l = g + \sum_{n=1}^{\infty} s_2\left(\frac{n\omega'}{\omega}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} s_2\left(\frac{n\omega'}{\omega}\right)$$

Korzystając z tożsamości $\sigma(u) = (\sigma(u))_{\nu'=0}\cdot\prod\limits_{\nu'=-\infty}(\sigma(u))_{\nu'(=)0}$ otrzymamy wyrażenie na $\sigma(u)$, jakie następuje, tożsamościowe z poprzednim:

$$\sigma(u) = 2\omega e^{l\left(\frac{u}{2\omega}\right)^2} s\left(\frac{u}{2\omega}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{s\left(\frac{n\omega'}{\omega}-\frac{u}{2\omega}\right)}{s\left(\frac{n\omega'}{\omega}\right)}\cdot\frac{s\left(\frac{n\omega'}{\omega}+\frac{u}{2\omega}\right)}{s\left(\frac{n\omega'}{\omega}\right)}\right\}$$

W rozumowaniu poprzedniem rozpatrywaliśmy funkcye $s(x)$, $s_1(x)$, $s_2(x)$ jako nieskończone wieloczyny i sumy, a nie korzystaliśmy z tego, że mogą się wyrażać te funkcye przez funkcye trygonometryczne.

Łatwo się przekonać, że $s(x)$ jest funkcya okresowa

$$s(x) = x\prod_{-\infty}^{\infty}{}'\left(1-\frac{x}{n}\right)e^{\frac{x}{n}}$$

Zbierzmy wszystkie wyrazy, w których n zmienia się od $-\tau$ do $+\tau$ i nazwijmy z nich wieloczyn przez $\pi(x,\tau)$

$$\pi(x,\tau) = (-1)^{\tau}\left(\frac{1}{\tau!}\right)^2(x+\tau)(x+\tau-1)\ldots\ldots x(x-1)\ldots\ldots(x-\tau)$$

$$\pi(x+1,\tau) = (-1)^{\tau}\left(\frac{1}{\tau!}\right)^2(x+\tau+1)(x+\tau)\ldots\ldots(x+1)x(x-1)\ldots\ldots(x-\overline{\tau-1})$$

Więc $$\frac{\pi(x+1,\tau)}{\pi(x,\tau)} = \frac{x+\tau+1}{x-\tau}$$

(* {\`}Z powodu Wyrazy znalezione w nawiasem zamknięte nie mogą być rozłączone.

Przy wzrastającem nieograniczenie z dąży $\pi(x,z)$ do $s(x)$, więc

$$\frac{s(x+1)}{s(x)}=-1\,,\quad \frac{s(x+2)}{s(x)}=+1$$ t. j. $s(x)$ posiada okres 2, a zmianą argumentu na 1, funkcya ta zmienia znak.

Zastąpmy we wzorze na $\sigma(u)$ u przez $u+2\omega$, będzie:

$$\sigma(u+2\omega)=-e^{\frac{l}{\omega}(u+\omega)}\sigma(u)\,,\text{ albo:}$$

$$\sigma(u+\omega)=-e^{\frac{l}{\omega}u}\sigma(u-\omega)$$

$\sigma(u)$, podobnież jak i $s(u)$ jest nieparzysta, więc:

$$\sigma(u+\omega)=e^{\frac{lu}{\omega}}\sigma(\omega-u)$$

Różniczkując względem u (logarytmowo):

$$\frac{\sigma'(u+\omega)}{\sigma(u+\omega)}=\frac{l}{\omega}-\frac{\sigma'(\omega-u)}{\sigma(\omega-u)}$$

Zakładając $u=0$, znachodzimy: $\frac{l}{2\omega}=\frac{\sigma'(\omega)}{\sigma(\omega)}$ .....

Zaprowadźmy raz na zawsze znakowanie $\frac{\sigma'(\omega)}{\sigma(\omega)}=\eta$. Wtedy:

(α) ...... $\sigma(u+2\omega)=-e^{2\eta(u+\omega)}\sigma(u)$.

Ze wzoru na stronie 34 widzimy, że $\sigma(u)$ jest symetryczna względem ω i ω', więc oznaczywszy $\frac{\sigma'(\omega')}{\sigma(\omega')}=\eta'$ mieć będziemy:

(β) ..... $\sigma(u+2\omega')=-e^{2\eta'(u+\omega')}\sigma(u)$

Stałe $\omega, \omega', \eta, \eta'$ mają ze sobą pewien związek, którego znaj-

nie dla nas jest niemałoważne.

Za pomocą wzorów (α) i (β) znachodzimy:

$$\sigma(u+2\omega+2\omega') = e^{2\eta(u+\omega+2\omega')+2\eta'(u+\omega')}\,\sigma(u)$$

$$\sigma(u+2\omega+2\omega') = e^{2\eta'(u+\omega'+2\omega)+2\eta(u+\omega)}\,\sigma(u)$$

Wykładniki u e powinny się różnić nie inaczej jak o pewną wielokrotną liczby $2\pi i$, więc

$$\eta\omega' - \eta'\omega = k\frac{\pi i}{2}$$

Dla wyznaczenia k radzimy sobie jak następuje. Wzór na $\sigma(u)$ (str. 47) różniczkujemy logarytmowo; funkcya s stanie się s_1.

$$\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} = \frac{\eta u}{\omega} + \frac{1}{2\omega}s_1\left(\frac{u}{2\omega}\right) + \frac{1}{2\omega}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{-s_1\left(\frac{n\omega'}{\omega}-\frac{u}{2\omega}\right)+s_1\left(\frac{n\omega'}{\omega}+\frac{u}{2\omega}\right)\right\}$$

Mnożąc przez ω i zakładając $u=\omega'$, mamy

$$\omega\eta' - \eta\omega' = \frac{1}{2}s_1\left(\frac{\omega'}{2\omega}\right) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{-s_1\left(\frac{(2n-1)\omega'}{2\omega}\right)+s_1\left(\frac{(2n+1)\omega'}{2\omega}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}s_1\left(\frac{\omega'}{2\omega}\right) - \frac{1}{2}s_1\left(\frac{\omega'}{2\omega}\right) + \frac{1}{2}s_1\left(\frac{3\omega'}{2\omega}\right) - \frac{1}{2}s_1\left(\frac{3\omega'}{2\omega}\right) + \frac{1}{2}s_1\left(\frac{5\omega'}{2\omega}\right) - \cdots$$

Stąd $\omega\eta' - \eta\omega' = \lim_{n=\infty}\frac{1}{2}s_1\left(\frac{(2n+1)\omega'}{2\omega}\right) = \frac{\pi}{2}\lim \operatorname{cotg}\frac{(2n+1)\omega'\pi}{2\omega}$

Lecz wiadomo, że $\operatorname{Cotg}(\alpha+\beta i) = \mp i$ dla $\beta = \pm\infty$ i jakiegokolwiek α. $\frac{\omega'}{\omega}$ – urojone, $\frac{2n+1}{2}$ – dodatnie, znak β zależy od

znaku urojonej spółrzędnej wielkości $\frac{\omega'}{\omega}$

$$\omega\eta' - \eta\omega' = \mp\frac{\pi i}{2} \text{ albo } \eta\omega' - \omega\eta' = \pm\frac{\pi i}{2} \text{ t. j. } \kappa = \pm 1.$$

Bierzemy tu + albo − stósownie do tego będzie-li urojona spółrzędna wielkości $\frac{\omega'}{\omega}$ (albo rzeczywista $\frac{\omega'}{\omega i}$) dodatnia, czy odjemna.

We wzorze na $\sigma(u)$ można funkcye s zastąpić przez wyrażenia trygonometryczne:

$$\sigma(u) = \frac{2\omega}{\pi} e^{l\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)^2} \sin\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right) \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\left(\frac{n\omega'}{\omega} - \frac{u}{2\omega}\right)\pi\right) \sin\left(\left(\frac{n\omega'}{\omega} + \frac{u}{2\omega}\right)\pi\right)}{\sin^2\left(\frac{n\omega'}{\omega}\pi\right)}$$

$$l = \frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{n\omega'\pi}{2\omega}\right)} = \frac{1}{6} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{n\omega'\pi}{2\omega}\right)}$$

Za pomocą wzoru $\sin(x+y)\sin(x-y) = \sin^2 x - \sin^2 y$ otrzymamy:

$$\sigma(u) = \frac{2\omega}{\pi} e^{l\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)^2} \sin\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right) \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\sin^2\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)}{\sin^2\left(\frac{n\omega'\pi}{\omega}\right)}\right)$$

Dla $\omega' = \infty$

$\sin\left(\frac{n\omega'\pi}{\omega}\right)$ i $\sin\left(\frac{n\omega'\pi}{2\omega}\right)$ stają się ∞, gdyż wielkość $\frac{\omega'}{\omega}$ jest urojona; l staje się $\frac{1}{6}$, a Π jednością.

$$\left(\sigma(u)\right)_{\omega'=\infty} = \frac{2\omega}{\pi} e^{\frac{1}{6}\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)^2} \sin\frac{u\pi}{2\omega}$$

Podobnież dla $\omega = \infty$. Funkcya $\sigma(u)$ staje się funkcyą try-

ponemgbryczną, i który tylko jeden z okresów ~~przybiera~~ ma wartość nieskończoną. W wypadku kiedy obydwa okresy $=\infty$, będzie $\sigma(u)=u$.

We wzorach dla $\sigma(u)$ możnaby ω i ω' zastępować przez inne wielkości.

$$\sigma(u) = u\prod{}'\left(1-\frac{u}{w}\right)e^{\frac{u}{w}+\frac{1}{2}\left(\frac{u}{w}\right)^2} \ldots, \quad w = 2\nu\omega + 2\nu'\omega'$$

Zamiast ν i ν' wprowadźmy nowe ilości μ i μ', związane z poprzednimi przez równania $\nu=\alpha\mu+\beta\mu'$, $\nu'=\alpha'\mu+\beta'\mu'$, gdzie $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ liczby całkowite, czyniące zadość zrówn. $\alpha\beta'-\alpha'\beta=\pm 1$.

$$w = 2\mu(\alpha\omega+\alpha'\omega') + 2\mu'(\beta\omega+\beta'\omega') = 2\mu\tilde{\omega} + 2\mu'\tilde{\omega}'$$

Funkcya $\sigma(u)$ jednocześnie pod zmienionym kształtem zachowuje swoją wartość

$$\tilde{\omega} = \alpha\omega + \alpha'\omega'$$

$$\tilde{\omega}' = \beta\omega + \beta'\omega'$$

Ponieważ wyznacznik $\alpha\beta'-\alpha'\beta=\pm 1$, to ω i ω' dadzą się całkowicie wyrazić przez $\tilde{\omega}$ i $\tilde{\omega}'$. Wszystkie wzory zachowają się

$$\sigma(u+2\tilde{\omega}) = -e^{2\tilde{\eta}(u+\tilde{\omega})}\sigma(u), \text{ gdzie } \tilde{\eta} = \frac{\sigma'(\tilde{\omega})}{\sigma(\tilde{\omega})}.$$

Zrównania powyższe istnieją dla każdej pary całkowitych liczb α i α' nie posiadających czynnika wspólnego, gdyż pod takim warunkiem można zawsze znaleźć β i β' czyniące zadość zr. $\alpha\beta' - \alpha'\beta = \pm 1$.

Wzór poprzedni można podać pod kształtem:

$$e^{-\frac{\eta}{2\omega}(u+2\bar{\omega})^2}\sigma(u+2\bar{\omega}) = -e^{-\frac{\eta}{2\bar{\omega}}u^2}\sigma(u)$$

Dla skrócenia oznaczmy lewą stronę przez $\psi(u)$. Będzie:

$\psi(u) = -\psi(u+2\bar{\omega})$, $\psi(u) = \psi(u+4\bar{\omega})$, ... $\psi(u) = (-1)^r\psi(u+2r\bar{\omega})$; z tąd.

$$(-1)^r e^{-\frac{\bar{\eta}}{2\bar{\omega}}(u+2r\bar{\omega})^2}\sigma(u+2r\bar{\omega}) = e^{-\frac{\bar{\eta}}{2\bar{\omega}}u^2}\sigma(u), \text{ albo:}$$

$$\sigma(u+2r\bar{\omega}) = (-1)^r e^{2r\bar{\eta}(u+r\bar{\omega})}\sigma(u).$$

Zamiast $r\bar{\omega}$ i $r\bar{\eta}$ napiszmy $\bar{\omega}$ i $\bar{\eta}$

$$\sigma(u+2\bar{\omega}) = (-1)^r e^{2\bar{\eta}(u+\bar{\omega})}\sigma(u) \quad ; \quad \bar{\omega} = \mu\omega + \mu'\omega'$$

r jest najw. wsp. dzielnik liczb μ i μ'.

Na str. 31 była utworzona funkcya

$$\varphi(u) = \frac{\sigma^{\lambda_1}(u-a_1)\sigma^{\lambda_2}(u-a_2)\cdots\cdots\sigma^{\lambda_r}(u-a_r)}{\sigma^{\mu_1}(u-b_1)\sigma^{\mu_2}(u-b_2)\cdots\cdots\sigma^{\mu_s}(u-b_s)}e^{g(u)}$$

Mamy teraz do zbadania pod jakim warunkiem ta funkcya będzie typem funkcyi dwuokresowej.

Korzystając, że $\sigma^{\lambda_k}(u+2\omega-a_k)=(-1)^{\lambda_k}e^{2\lambda_k\eta(u-a_k+\omega)}\sigma^{\lambda_k}(u-a_k)$, znachodzimy: $\varphi(u+2\omega)=(-1)^{\lambda-\mu}e^{2\eta(u+\omega)(\lambda-\mu)-2\eta(\Sigma\lambda_k a_k-\Sigma\mu_l b_l)+g(u+2\omega)-g(u)}\varphi(u)$,

gdzie $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_r=\lambda$, $\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_s=\mu$

Ażeby $\varphi(u)$ posiadała okres, ~~[illegible]~~ musi być:

$$g(u+2\omega)-g(u)=2\eta\left(\Delta-(\lambda-\mu)(u+\omega)\right)+\kappa\pi i$$

gdzie κ parzyste lub nieparzyste stosownie do parzystości lub nieparzystości liczby $\lambda-\mu$.

$$\Delta=\sum\lambda_k a_k-\sum\mu_l b_l$$

$2\omega'$ ma też służyć okresem funkcyi, więc:

$$g(u+2\omega')-g(u)=2\eta'\left(\Delta-(\lambda-\mu)(u+\omega')\right)+\kappa'\pi i$$

Tutaj κ i κ' są stałe; jeżeli wszystkie wyrazy zawierające u przenieść w lewą stronę, to utworzona w ten sposób jednowartościowa funkcya u zmienia się w sposób ciągły. Prawa zaś strona zrównania może zmieniać się tylko skokami, gdyż κ i κ' są liczby całkowite. Stąd to κ i κ' są stałe względem u.

Różniczkując dwukrotnie zrównanie powyższe, mamy:

$$g''(u+2\omega) - g''(u) = 0$$

$$g''(u+2\omega') - g''(u) = 0$$

$g''(u)$ ~~musi~~ powinna być funkcyą dwuokresową, a dla tego we wnętrzu równoległoboku okresu powinna mieć [illegible] Tego zaś być tutaj niemoże, gdyż $g(u)$, więc i $g''(u)$ są to szeregi stale zbieżne, nie przybierające nigdy wartości nieskończonych, dopóki u pozostaje skończonem. Stąd wniosek, że g'', musi być ilością stałą.

$$g(u) = \alpha u^2 + 2\beta u + \gamma \quad , \text{skąd}$$

$$g(u+2\omega) - g(u) = 4\alpha\omega(u+\omega) + 4\beta\omega$$

$$g(u+2\omega') - g(u) = 4\alpha\omega'(u+\omega') + 4\beta\omega'$$

Porównajmy te różnice z powyższymi. Równając spółczynniki przy $u+\omega$ i $u+\omega'$, znajdziemy:

$$2\alpha\omega + (\lambda-\mu)\eta = 0$$

$$2\alpha\omega' + (\lambda-\mu)\eta' = 0$$

Stąd $(\lambda-\mu)(\eta\omega' - \eta'\omega) = 0$. Widzieliśmy poprzednio, że drugi czynnik nie jest zerem, jest więc $\lambda = \mu$, κ – parzyste $i = 2\kappa$, $\alpha = 0$.

Musi więc ilość zer równać się ilości nieskończoności (nie kongruentnych między sobą), jeżeli ma być $\varphi(u)$ funkcyą dwuokresową. Oprócz tego powinno być

$$g(u) = 2\beta u + \gamma$$

$$g(u+2\omega) = g(u) + 4\beta\omega$$

Z pomocą tych zaś znachodzimy:

$$4\beta\omega = 2\eta\Delta + 2\kappa\pi i \quad \Big| \quad \eta\Delta - 2\beta\omega = -\kappa\pi i$$

$$4\beta\omega' = 2\eta'\Delta + 2\kappa'\pi i \quad \Big| \quad \eta'\Delta - 2\beta\omega' = -\kappa'\pi i$$

Stąd na podstawie $\eta\omega' - \omega\eta' = \frac{\pi i}{2}$, otrzymujemy:

$$\Delta = 2\kappa'\omega - 2\kappa\omega' = 2\bar{\omega}$$

$$2\beta = 2\kappa'\eta - 2\kappa\eta' = 2\bar{\eta}, \text{ więc}$$

$$g(u) = 2\bar{\eta}u + \gamma \ ; \ \sum \lambda_k a_k - \sum \mu_k b_k = 2\bar{\omega}$$

Każdy punkt a, b wewnątrz równoległoboku okresu może być zastąpiony przez punkt jakikolwiek z nim kongruentny. Przytem wszystkie wzory powyższe zachowują się, a punkt a i b można tak wybrać, żeby $\sum \lambda_k a_k - \sum \mu_i b_i = 0$.

W takim razie $\kappa = 0$, $\kappa' = 0$, $\bar{\eta} = 0$, $\bar{\omega} = 0$. Typ ogólny dwuokreso-

wej funkcyi będzie zatem

$$\varphi(u) = C\,\frac{\sigma^{\lambda_1}(u-a_1)\,\sigma^{\lambda_2}(u-a_2)\cdots\cdots\sigma^{\lambda_r}(u-a_r)}{\sigma^{\mu_1}(u-b_1)\,\sigma^{\mu_2}(u-b_2)\cdots\cdots\sigma^{\mu_s}(u-b_s)}\,,\ \text{gdzie}$$

$$\sum_{k=1}^{r}\lambda_k - \sum_{i=1}^{s}\mu_s = 0 \quad i \quad \sum_{k=1}^{r}\lambda_k a_k - \sum_{i=1}^{s}\mu_s b_s = 0.$$

Łatwo się przekonać że przy takich warunkach rzeczywiście $\varphi(u+2\omega)=\varphi(u)$; $\varphi(u+2\omega')=\varphi(u)$.

Jeżeli liczba niekongruentnych zer jest λ, to $\varphi(u)$ nazywa się dwuokresową rzędu λ.

Nie mamy ~~fun~~ wcale funkcyi dwuokresowych rzędu pierwszego, gdyż w razie przeciwnym musiałoby być $a=b$, a

$$\varphi(u) = C\,\frac{\sigma(u-a)}{\sigma(u-b)} = C.$$

Najprostsza więc funkcya dwuokresowa ma rząd 2.

Mamy dowieść teraz, że w przypadku ~~jednego okresu~~, gdy jeden okres np. $\omega'=\infty$, otrzymuje się funkcya zwyczajna jednookresowa, posiadająca twierdzenie dodawania.

Następnie dowiedziemy, że wszystkie funkcye dwuokresowe posiadają twierdzenie dodawania.

Kiedy ω' staje się $\infty^{\text{ią}}$, mogą a i b pozostać bez zmiany; $\Sigma a = \Sigma b$, gdzie każde a i każde b powtarza się należytą ilość razy. Niech będzie u_0 taka wartość, dla której funkcya nie $= 0, \infty$.

$$\frac{\varphi(u)}{\varphi(u_0)} = \frac{\prod \sigma(u-a_\mu)\sigma(u_0-b_\mu)}{\prod \sigma(u_0-a_\mu)\sigma(u-b_\mu)}$$

Widzieliśmy (str. 57), że $\left(\sigma(u)\right)_{\omega'=\infty} = \frac{2\omega}{\pi} e^{\frac{1}{6}\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)^2} \sin\frac{u\pi}{2\omega}$

$$\left(\frac{\varphi(u)}{\varphi(u_0)}\right)_{\omega'=\infty} = \frac{e^{\frac{\pi^2}{24\omega^2}\sum\left[(u-a_\mu)^2+(u_0-b_\mu)^2\right]}}{e^{\frac{\pi^2}{24\omega^2}\sum\left[(u_0-a_\mu)^2+(u-b_\mu)^2\right]}} \prod_\mu \frac{\sin\frac{(u-a_\mu)\pi}{2\omega}\sin\frac{(u_0-b_\mu)\pi}{2\omega}}{\sin\frac{(u_0-a_\mu)\pi}{2\omega}\sin\frac{(u-b_\mu)\pi}{2\omega}}$$

$$\sum\left\{(u-a_\mu)^2+(u_0-b_\mu)^2-(u_0-a_\mu)^2-(u_0-b_\mu)^2\right\} = 2\sum(u_0-u)(a_\mu-b_\mu)$$

$$= 2(u_0-u)\sum(a_\mu-b_\mu) = 0. \quad \text{Więc:}$$

$$A) \quad \left(\frac{\varphi(u)}{\varphi(u_0)}\right)_{\omega'=\infty} = \prod_\mu \frac{\sin\frac{(u-a_\mu)\pi}{2\omega}\sin\frac{(u_0-b_\mu)\pi}{2\omega}}{\sin\frac{(u_0-a_\mu)\pi}{2\omega}\cdot\sin\frac{(u-b_\mu)\pi}{2\omega}}$$

Mamy uprzytomnić sobie, czy wszystkie funkcye okresowe, posiadające twierdzenie dodawania sprowadzają się do kształtu powyższego. Niech $x = e^{\frac{u\pi i}{\omega}}$. Widzieliśmy, że takie funkcye okresowe są to funkcye wymierne wielkości x. Nazwijmy funkcyą

taką przez $f(u)$

$$f(u) = x^k \frac{\pi(x-g_\lambda)}{\pi(x-h_\mu)}, \text{ gdzie } g_\lambda (=) 0, \; h_\mu (=) 0. \text{ Inaczej:}$$

$$f(u) = e^{k\frac{u\pi i}{\omega}} \frac{\prod_1^r \left(e^{\frac{u\pi i}{\omega}} - g_\lambda\right)}{\prod_1^s \left(e^{\frac{u\pi i}{\omega}} - h_\mu\right)}$$

Zaprowadziwszy znaczenia

$$g_\lambda = e^{\frac{a_\lambda \pi i}{\omega}}, \quad h_\mu = e^{\frac{b_\mu \pi i}{\omega}}$$

Po nieznacznych przekształceniach otrzymujemy wzór ogólny funkcyi okresowej, posiadającej twierdzenie dodawania

$$(B) \qquad f(u) = C e^{(2k+r-s)\frac{u\pi i}{2\omega}} \frac{\prod_\lambda \sin \frac{(u-a_\lambda)\pi}{2\omega}}{\prod_\mu \sin \frac{(u-b_\mu)\pi}{2\omega}}$$

Wzór A) daje się łatwo sprowadzić na wzór B) jak następuje. Równoległobok okresu dla $\omega' = \infty$ staje się pasem nieskończonym. Przytem niektóre a, b można przesunąć w ∞.
Każdą z tych wartości można napisać:

$$a = 2\xi\omega + 2\xi'\omega' \ldots, \text{ albo } \frac{a}{2\omega} = \xi + \xi'\frac{\omega'}{\omega}$$

Spółrzędna urojona $\frac{\omega'}{\omega}$ nie $= 0$, $\frac{a}{2\omega}$ może stać się nieskończonem tylko tem, że jej urojona spółrzędna stanie się ∞ $\frac{\omega'}{\omega}$
Jeśli $a = \alpha + \beta i$, to dla $\omega' = \infty$, powinno być $\beta = \infty$. We wzorze

A, mianowicie w $\tau-\tau'$ czynnikach tegoż zrobimy przekształcenie:

$$\frac{\sin\frac{(u-a_\mu)\pi}{2\omega}}{\sin\frac{(u_0-a_\mu)\pi}{2\omega}} = \frac{e^{\frac{(u-a_\mu)\pi i}{2\omega}} - e^{-\frac{(u-a_\mu)\pi i}{2\omega}}}{e^{\frac{(u_0-a_\mu)\pi i}{2\omega}} - e^{-\frac{(u_0-a_\mu)\pi i}{2\omega}}}$$

Kiedy a_μ stanie się nieskończonością w sposób opisany, wyrażenie powyższe staje się równem $e^{\pm\frac{u-u_0}{2\omega}\pi i}$, gdzie + będzie, jeśli urojona spółcz. a_μ będzie >0, a − kiedy <0. Tegoż dokonamy na $\tau-\tau''$ czynnikach z b_ν.

Ostatecznie będzie:

$$\left(\frac{\varphi(u)}{\varphi(u_0)}\right)_{\omega=\infty} = e^{\frac{(u-u_0)(m'-m'')\pi i}{2\omega}} \frac{\prod_1^{\tau'}\sin\frac{(u-a_\mu)\pi}{2\omega}\cdot\prod_1^{\tau''}\sin\frac{(u_0-b_\nu)\pi}{2\omega}}{\prod_1^{\tau'}\sin\frac{(u_0-a_\mu)\pi}{2\omega}\cdot\prod_1^{\tau''}\sin\frac{(u-b_\nu)\pi}{2\omega}}$$

gdzie $m'\equiv(\tau-\tau')\pmod 2$; $m''\equiv(\tau-\tau'')\pmod 2$.

W kształcie B) można oznaczyć stałą C dając u wartość u_0, dla której $f(u)$ nie jest ani 0, ani ∞.

$$\frac{f(u)}{f(u_0)} = e^{\frac{l(u-u_0)\pi i}{2\omega}} \frac{\prod_1^{\lambda}\sin\frac{(u-a_\lambda)\pi}{2\omega}\cdot\prod_1^{\mu}\sin\frac{(u_0-b_\mu)\pi}{2\omega}}{\prod_1^{\lambda}\sin\frac{(u_0-a_\lambda)\pi}{2\omega}\cdot\prod_1^{\mu}\sin\frac{(u-b_\mu)\pi}{2\omega}}$$

Wzór to tegoż kształtu co i poprzedni. Założywszy $\omega=\infty$, otrzymamy wymierną funkcyą u. Tak więc funkcye okresowe, posiadające twierdzenie dodawania i wymierne funkcye stanowią wypadek szczególny funkcyj dwuokresowych.

Najprostsze funkcye dwuokresowe posiadają dwa zera i dwie nieskończoności (naturalnie mówimy tu o niekongruentnych), są one zatem kształtu

$$\varphi(u) = C\,\frac{\sigma(u-a_1)\sigma(u-a_2)}{\sigma(u-b_1)\sigma(u-b_2)}\,,\ \text{gdzie}\ a_1+a_2=b_1+b_2$$

$\omega, \omega', a_1, a_2, b_1, b_2$ są to stałe, 5 z pomiędzy nich mają wartości niezależne. Punkta nieskończone można zsunąć w jeden punkt b, tak że będzie:

$$\varphi(u) = C\,\frac{\sigma(u-a).\sigma(u-2b+a)}{\sigma^2(u-b)}$$

Można założyć $b=0$

$$\varphi(u) = C\,\frac{\sigma(u-a)\sigma(u+a)}{\sigma^2(u)}$$

Dla $u=0$, $\sigma(u)$ staje się zerem rzędu pierwszego, więc się rozwija na szereg $\quad \sigma(u) = u\mathfrak{P}(u)$

gdzie wyraz stały szeregu $\mathfrak{P}(u)$ nie jest zerem; więc

$$\sigma^2(u) = u^2\mathfrak{P}_1(u)$$

Wtedy: $\sigma(u-a) = (u-a)\mathfrak{P}(u-a) = -a\mathfrak{P}(-a) + u\overline{\mathfrak{P}}(u)$, albo

$\sigma(u-a) = \sigma(-a) + u\overline{\mathfrak{P}}(u)$, a dla nieparzystości $\sigma(u)$

$$\sigma(u-a) = -\sigma(a) + u\overline{\mathfrak{P}}(u)$$

$$\sigma(u+a) = \sigma(a) + u\mathfrak{P}(u)$$

Rozwijając $\varphi(u)$ na szereg, otrzymujemy

$$\varphi(u) = -C\frac{\sigma^2(a)}{u^2} + \cdots$$

Stałą C wybierzemy tak, żeby spółczynnik przy u^{-2} równał się 1. Zamiast a napiszemy v

$$\varphi(u) = \frac{\sigma(v-u)\,\sigma(v+u)}{\sigma^2(u).\,\sigma^2(v)} = \frac{1}{u^2} + c_0 + c_1 u^2 + \cdots$$

$\varphi(u)$ jest funkcya parzystą, dlatego też wyrazy o nieparzystych wykładnikach u nie mogą figurować w szeregu. Stałe tutaj zależą od trzech wielkości ω, ω' i v. Na tej funkcji zatrzymamy się nieco dłużej. Mieliśmy poprzednio

$$\sigma(u) = u\prod{}'\left(1-\frac{u}{w}\right)e^{\frac{u}{w}+\frac{1}{2}\left(\frac{u}{w}\right)^2}$$

Stąd
$$\frac{d\log\sigma(u)}{du} = \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} = \frac{1}{u} + \sum{}'\left(\frac{1}{u-w} + \frac{1}{w} + \frac{u}{w^2}\right)$$

$$-\frac{d^2\log\sigma(u)}{du^2} = u^{-2} + \sum{}'\left\{\frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2}\right\}$$

Tę funkcyę będziemy zawsze oznaczali przez $\wp$, więc

$$\wp(u) = -\frac{d^2\log\sigma(u)}{du^2} = \frac{1}{u^2} + \sum{}'\left\{\frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2}\right\}$$

Stąd: $-\wp'(u) = \dfrac{d^3\log\sigma(u)}{du^3} = \dfrac{2}{u^3} + \sum{}' \dfrac{2}{(u-w)^3}$ czyli: $-\wp'(u) = 2\sum \dfrac{1}{(u-w)^3}$

Stąd zaś wynika

$$\wp'(u+2\omega) = \wp'(u)$$

$$\wp'(u+2\omega') = \wp'(u) \quad \text{, więc}$$

$$\wp(u+2\omega) = \wp(u) + c$$

Załóżmy $u=-\omega$, do czego jesteśmy uprawnieni, bo $\wp$, jak widać z określenia ma znaczenie dla każdej wartości.

$$\wp(\omega) = \wp(-\omega) + C$$

Lecz $\wp(u)$ jest parzysta, $\wp(\omega) = \wp(-\omega)$, więc $C=0$ t.j

$$\wp(u+2\omega) = \wp(u)$$

$$\wp(u+2\omega') = \wp(u)$$

t.j $\wp$ jest funkcya dwuokresowa. Ona zależy li tylko od dwóch stałych ω i ω'.

O okresowości łatwo jest dowieść wprost z określenia funkcyi $\wp(u)$. Istotnie:

$$\wp(u) - \wp(v) = \frac{1}{u^2} - \frac{1}{v^2} + \sum{}' \left\{ \frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{(v-w)^2} \right\}$$; v nie jest okres.

Zmieniamy w $\underline{w}$ ν na $\nu-1$, lub inaczej zwiększamy $\underline{u}$ i $\underline{v}$ na 2ω; strona prawa pozostanie bez zmiany jak

to wynika ze zrównania

$$\wp(u)-\wp(v)=\sum\left(\frac{1}{(u-w)^2}-\frac{1}{(v-w)^2}\right), \text{ więc } \wp(u)-\wp(v)=\wp(u+2\omega)-\wp(v+2\omega)$$

albo $\wp(u+2\omega)-\wp(u)=\wp(v+2\omega)-\wp(v)$, a więc $\wp(u+2\omega)-\wp(u)=C$

Przypatrzmy znów do zrównania, z którego co tylko wyrowiaskowaliśmy dwuokresowość $\wp(u)$. Ta funkcya staje się nieskończoną (rzędu 2^{go}) tylko raz jeden w równoległoboku okresu mianowicie dla $u=0$, jak o tem wnosimy z określenia $\wp(u)$. Tożsamo da się powiedzieć i o funkcyi $\wp(u)-\wp(v)$; ta zresztą staje się nadto zerem dla $u=v$; jako dwuokresowa powinna one stawać się zerem raz jeszcze dla $u=-v$ na podstawie zrównania. $\sum \alpha_k a_s = \sum \mu_i b_i$ (str. 56.). Otóż tedy:

$$\wp(u)-\wp(v)=C\,\frac{\sigma(u+v)\,\sigma(u-v)}{\sigma^2(u)}$$

Rozwijając obie strony na szeregi, otrzymujemy $C=-\frac{1}{\sigma^2 v}$

więc $$\wp(u)-\wp(v)=\frac{\sigma(u-v)\,\sigma(u+v)}{\sigma^2(u)\,\sigma^2(v)}$$

Funkcya $\wp(u)-\wp(v)$ jest jednakowa z funkcyą $\varphi(u)$ (str. 50)

Wzór powyższy można napisać jeszcze tak

$$\frac{\sigma(u+v)\,\sigma(u-v)}{\sigma^2(u)\,\sigma^2(v)}=\begin{vmatrix}1 & \wp(u)\\ 1 & \wp(v)\end{vmatrix}$$

Z wyznacznika widać, że funkcya ta staje się $\infty^{\text{ią}}$ tylko dla $\wp(u)=\infty$, a zerem dla $\wp(u)=\wp(v)$.

Wzór powyższy łatwo daje się uogólnić. Weźmy funkcyę

$$\varphi(u,v,w)=\frac{\sigma(u+v+w).\sigma(u-v)\sigma(u-w)\sigma(v-w)}{\sigma^3(u).\sigma^3(v).\sigma^3(w)}$$

Jestto funkcya znakozmienna symmetryczna ilości u, v, w. Nadto jest ona dwuokresowa, gdyż dla $u=0$ staje się $\infty^{\text{ią}}$ rzędu 3^{go}, a w punktach $u=v$, $u=w$, $u=-(v+w)$ staje się zerem; nadto suma tych wartości $=0$. Jestto więc funkcya dwuokresowa rzędu 3^{go}. Rozwijając ją na szereg dla małych wartości u, otrzymamy

$$\varphi(u,v,w)=u^{-3}\frac{\sigma(v+w)\sigma(v-w)}{\sigma^2(v)\sigma^2(w)}+\dots=u^{-3}(\wp(w)-\wp(v))+\cdots$$

Rozpatrzmy teraz wyznacznik

$$-\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & \wp(u) & \wp'(u)\\ 1 & \wp(v) & \wp'(v)\\ 1 & \wp(w) & \wp'(w)\end{vmatrix}$$

Naprzód jestto funkcya dwuokresowa zmiennej u, gdyż $\wp(u)$ i $\wp'(u)$ są tego rodzaju; dla $u=0$ staje się ona $\infty^{\text{ią}}$

wszech trzykrotnie, jak $\wp'(u)$. Jestto więc funkcya dwuokresowa 3^{go} rzędu o jednym nieskończonym punkcie $u=0$. Wyznacznik staje się zerem, kiedy ma dwie linii jednakowe; będzie to miało miejsce dla $u=v$, $u=w$. Nadto będzie on zero i dla $u=-(v+w)$, gdyż jestto funkcya dwuokresowa! (sic) Wyznacznik nasz posiada też same zera i nieskończoności, co i $\varphi(u,v,w)$. W rozwinięciu na szereg zaczyna się on od tegoż samego, co i φ wyrazu. Napiszmy go tak.

$$-\frac{1}{2}u^{-3}\begin{vmatrix} u^3 & u^3\wp(u) & u^3\wp'(u) \\ 1 & \wp(v) & \wp'(v) \\ 1 & \wp(w) & \wp'(w) \end{vmatrix}$$

W tym wyznaczniku wyraz niezależny od u otrzyma się z ...... $u^3\wp'(u)\begin{vmatrix} 1 & \wp(v) \\ 1 & \wp(w) \end{vmatrix}$

Rozwinięcie $\wp'(u)$ zaczyna się od wyrazu: $-2u^{-3}$, będzie wyraz rzeczony: ...... $-2\begin{vmatrix} 1 & \wp(v) \\ 1 & \wp(w) \end{vmatrix}$

Dla tego wyznacznik nasz zaczyna się od wyrazu

$$u^{-3}\begin{vmatrix} 1 & \wp(v) \\ 1 & \wp(w) \end{vmatrix} \quad \text{t. j.} \quad u^{-3}\left(\wp(w)-\wp(v)\right)$$

Stąd wnosimy o tożsamości pomiędzy σ a wyznacznikiem t.j

$$\frac{\sigma(u+v+w)\sigma(u-v)\sigma(u-w)\sigma(v-w)}{\sigma^3(u)\sigma^3(v)\sigma^3(w)} = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & \wp(u) & \wp'(u) \\ 1 & \wp(v) & \wp'(v) \\ 1 & \wp(w) & \wp'(w) \end{vmatrix}$$

Zwrócimy się teraz do funkcyi dwuokresowej $\wp'(u)$, posiadającej trzykrotną ∞ $u=0$. Niech będzie $2\tilde{\omega}$ jakimbądź z okresów funkcyi $\wp(u)$.

$$\wp(u+2\tilde{\omega}) = \wp(u) \quad \text{stąd}$$

$$\wp'(u+2\tilde{\omega}) = \wp'(u)$$

$$\wp'(u+\tilde{\omega}) = \wp'(u-\tilde{\omega})$$

$\wp(u)$ jest parzysta, więc $\wp'(u)$ – nieparzysta.

$$\wp'(u+\tilde{\omega}) = -\wp'(\tilde{\omega}-u)$$

Zakładamy $u=0$

$$\wp'(\tilde{\omega}) = -\wp'(\tilde{\omega}) \quad \text{t.j} \quad \wp'(\tilde{\omega}) = 0 \text{ albo } \infty.$$

Lecz $\wp'(u)$, jak to widać z rozwinięcia na szereg, staje się ∞-ią tylko dla $u=$ okresowi t.j $u=2\omega$ lub $u=2\omega'$.

Więc $\wp'(\omega)=0$, $\wp'(\omega')=0$.

Jako dwukrotna musi $\wp'(u)$ stawać się zerem i dla $u=-(\omega+\omega')$

Przeto będziemy mieli

$$\wp'(u) = C\,\frac{\sigma(u+\omega+\omega')\,\sigma(u-\omega)\,\sigma(u-\omega')}{\sigma^3(u)}$$

Rozwińmy pierwszą stronę na szereg i porównajmy współczyn. pierwszego wyrazu z otrzymanym przy rozwinięciu $\wp'(u)$. Znajdziemy:

$$C = -\frac{2}{\sigma(\omega)\,\sigma(\omega')\,\sigma(\omega+\omega')}$$. Więc.

$$\wp'(u) = -\frac{2\sigma(u+\omega+\omega')\,\sigma(u-\omega)\,\sigma(u-\omega')}{\sigma^3(u)\,\sigma(\omega)\,\sigma(\omega')\,\sigma(\omega+\omega')}$$ Zmiana u na $-u$ daje:

$$-\wp'(u) = \frac{2\sigma(\omega+\omega'-u)\,\sigma(u+\omega)\,\sigma(u+\omega')}{\sigma^3(u)\,\sigma(\omega)\,\sigma(\omega')\,\sigma(\omega+\omega')}$$

Mnożąc, mamy:

$$[\wp'(u)]^2 = 4\,\frac{\sigma(\omega+\omega'+u)\,\sigma(\omega+\omega'-u)}{\sigma^2(u)\,\sigma^2(\omega+\omega')}\cdot\frac{\sigma(\omega+u)\,\sigma(\omega-u)}{\sigma^2(u)\,\sigma^2(\omega)}\cdot\frac{\sigma(\omega'+u)\,\sigma(\omega'-u)}{\sigma^2(u)\,\sigma^2(\omega')}$$

albo

$$[\wp'(u)]^2 = 4\big(\wp(u)-\wp(\omega+\omega')\big)\big(\wp(u)-\wp(\omega)\big)\big(\wp(u)-\wp(\omega')\big)$$

Wprowadzamy znakowanie $\wp(\omega)=e_1$, $\wp(\omega+\omega')=e_2$, $\wp(\omega')=e_3$

Wtedy $$\{\wp'(u)\}^2 = 4(\wp(u)-e_1)(\wp(u)-e_2)(\wp(u)-e_3)$$

Tak więc $\{\wp'(u)\}^2$ wyraża się wymiernie przez $\wp(u)$. Wykonując mnożenia, otrzymujemy:

$$\{\wp'(u)\}^2 = 4\wp^3(u) - g_1\wp^2(u) - g_2\wp(u) - g_3$$

Można dowieść, że g_1 b. i. $e_1+e_2+e_3=0$.

$$\wp(u) = u^{-2} + \sum{}'\left(\frac{1}{(w-u)^2} - \frac{1}{w^2}\right)$$

Dla wartości u z modułem mniejszym w, mamy:

$$\frac{1}{(w-u)^2} = \frac{1}{w^2} + \frac{2u}{w^3} + \frac{3u^2}{w^4} + \cdots$$

$$\sum{}'\left(\frac{1}{(w-u)^2} - \frac{1}{w^2}\right) = \sum{}'\left(\frac{2u}{w^3} + \frac{3u^2}{w^4} + \cdots\right)$$

Można tu szeregować według u, albowiem $\sum{}' w^{-\lambda}$ dla $\lambda \geqq 3$ jest zbieżna bezwarunkowo (str 43, 44)

$$\sum{}'\left\{\frac{1}{(w-u)^2} - \frac{1}{w^2}\right\} = 2u\sum{}'\frac{1}{w^3} + 3u^2\sum{}'\frac{1}{w^4} + 4u^3\sum{}'\frac{1}{w^5} + \cdots$$

Spółczynniki potęg nieparzystych będą zera, gdyż każdy element sumy ma swój odpowiedni z odwrotnym znakiem

Oznaczmy $\sum{}' w^{-2k}$ przez c_k. Będzie:

$$\wp(u) = u^{-2} + 3c_2u^2 + 5c_3u^4 + \cdots\cdots$$

$$\wp^2(u) = u^{-4} + 6c_2 + 10c_3u^2 + \cdots$$

$$\wp^3(u) = u^{-6} + 9c_2 u^{-2} + 15c_3 + \cdots$$

$$\wp'(u) = -2u^{-3} + 6c_2 u + 20c_3 u^3 + \cdots$$

$$\{\wp'(u)\}^2 = 4u^{-6} - 24c_2 u^{-2} - 80c_3 + \cdots$$

Wstawiając te szeregi do równania $\{\wp'(u)\}^2 = 4\wp^3(u) - g_1\wp^2(u) - g_2\wp(u) - g_3$ i porównując spółczynniki, otrzymamy:

$g_1 = 0$, $g_2 = 60c_2 = 60\sum' w^{-4}$; $g_3 = 140\sum' w^{-6}$. Będzie więc:

$$(\wp'(u))^2 = 4\wp^3(u) - g_2\wp(u) - g_3.$$

Ilości g_2 i g_3 noszą ~~za~~ nazwę ~~zr~~ niezmienników funkcyi $\wp(u)$. W ogóle zaś niezmienniki dwuokresowej funkcyi (ω, ω') są to wyrażenia pozostające bez zmiany jeśli się w nich zamieni okresy ω i ω' na ϖ i ϖ', określone ~~zro~~ przez równania $\varpi = \alpha\omega + \beta\omega'$, $\varpi' = \alpha'\omega + \beta'\omega$ pod warunkiem $\alpha\beta' - \alpha\beta = \pm 1$. Widzieliśmy* poprzednio że zamiana taka nie wpływa na $\sigma(u)$ toż więc winno mieć miejsce dla $\wp(u)$ i dla g_2, g_3.

Okresy można sprowadzić do kształtów normalnych t.j. takich żeby ω i $\frac{\omega'}{i}$ były ilości rzeczywiste dodatnie. Równoległobok okresu stanie się w tym przypadku prosto-

ątem pierwszego kwadrantu. Dla rzeczywistych wartości u funkc. $\sigma(u)$, g_2, g_3 będą rzeczywiste; dla u czysto urojonego, także $\sigma(u)$ będzie czysto urojona. Że $\wp(\omega)=e_1$ rzeczywiste, to zrzeczywistość wiadoma; $\wp(u)$ jako funkcya parzysta zostanie rzeczywistą i po zmianie u na ui, $\wp(\omega')=e_3$ będzie z tej przyczyny także rzeczywiste, a więc i $\wp(\omega+\omega')=e_2$.

Mamy teraz okazać, że $\wp(u)$ posiada twierdzenie dodawania.

Weźmy wyznacznik

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & \wp(u) & \wp'(u) \\ 1 & \wp(v) & \wp'(v) \\ 1 & \wp(w) & \wp'(w) \end{vmatrix}=\{\wp(u)-\wp(v)\}\wp'(w)+\{\wp(v)-\wp(w)\}\wp'(u)+\{\wp(w)-\wp(u)\}\wp'(v).$$

Podnieśmy to do kwadratu i zamieńmy $\{\wp'(w)\}^2$ na wartość jego $4\wp^3(w)-g_2\wp(w)-g_3$

$$\{\wp(u)-\wp(v)\}^2(4\wp^3(w)-g_2\wp(w)-g_3)-\{\Delta-\wp(v)\wp'(u)+\wp(u)\wp'(v)-(\wp'(v)-\wp'(u))\wp(w)\}^2=0.$$

Oznaczmy $\wp(w)$ przez s.

$$\{\wp(u)-\wp(v)\}^2(4s^3-g_2s-g_3)-(\Delta-\wp(v)\wp'(u)+\wp(u)\wp'(v)-(\wp'(v)-\wp'(u))s)^2=0.$$

$\Delta=0$ dla $w=u$, $w=v$, $w=-(u+v)$ t.j. wartości:

... $s=\wp(u)$, $s=\wp(v)$, $s=\wp(-u-v)=\wp(u+v)$

są to pierwiastki równania 3^{go} ~~rzędu~~ stopnia.

$$\{\wp(u)-\wp(v)\}^2(4s^3-g_2s-g_3)-\{\wp(v)\wp'(u)-\wp(u)\wp'(v)+(\wp'(v)-\wp'(u))s\}^2$$
$$=4(\wp(u)-\wp(v))^2(s-\wp(u))(s-\wp(v))(s-\wp(u+v))$$

Porównując spółczynniki, znachodzimy:

$$\{\wp'(v)-\wp'(u)\}^2=4(\wp(u)-\wp(v))^2\{\wp(u)+\wp(v)+\wp(u+v)\}$$ czyli

$$\wp(u+v)=\frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(u)-\wp'(v)}{\wp(u)-\wp(v)}\right)^2-\wp(u)-\wp(v)$$

Tak więc ~~dla~~ $\wp(u)$ posiada twierdzenie dodawania pod kształtem, że $\wp(u+v)$ wyraża się wymiernie przez $\wp(u)$, $\wp(v)$, $\wp'(u)$, $\wp'(v)$.

Można nadać temu wzorowi kształt nieco odmienny, rugując $\{\wp'(u)\}^2$ i $(\wp'(v))^2$ z pomocą związku $\{\wp'(u)\}^2=4\wp^3(u)-g_2\wp(u)-g_3$

Będzie $$\wp(u+v)=\frac{\{\wp(u)+\wp(v)\}\{2\wp(u)\wp(v)-\frac{1}{2}g_2\}-\wp'(u)\wp'(v)-g_3}{2\{\wp(u)-\wp(v)\}^2}$$

Jestto kształt który tu. c.o.d.

Jeżeli zaś v zastąpisz przez $-v$:

$$\wp(u-v)=\frac{\{\wp(u)+\wp(v)\}\{2\wp(u)\wp(v)-\frac{1}{2}g_2\}+\wp'(u)\wp'(v)-g_3}{2\{\wp(u)-\wp(v)\}^2}$$

Stąd ...

$$\wp(u+v)-\wp(u-v)=-\frac{\wp'(u)\wp'(v)}{\{\wp(u)-\wp(v)\}^2}=-\frac{\partial^2}{\partial u\partial v}\log\{\wp(u)-\wp(v)\}$$

$$\wp(u+v)+\wp(u-v)=\frac{\{\wp(u)+\wp(v)\}\{2\wp(u)\wp(v)-\frac{1}{2}g_2\}-g_3}{\{\wp(u)-\wp(v)\}^2}=-\frac{\partial^2}{\partial u^2}\log\{\wp(u)-\wp(v)\}+2\wp(u)$$

Taką drogą przekonujemy się o istnieniu funkcyj dwuokresowych takich, że $\varphi(u+v)$ wyraża się wymiernie przez $\varphi(u), \varphi(v), \varphi'(u), \varphi'(v)$. Takie to funkcye nazywają się eliptyczne. Dowiedziemy, że wszystkie dwuokresowe funkcye, noszące charakter funkcyj wymiernych dają się wyrazić wymiernie przez $\wp(u)$ i $\wp'(u)$, oraz że wszystkie one posiadają twierdzenie dodawania w tém znaczeniu, że $\varphi(u+v)$ wyraża się wymiernie przez $\varphi(u), \varphi(v), \varphi'(u), \varphi'(v)$. Inaczej dowiedziemy, że wszystkie funkcye dwuokresowe są eliptyczne (sic).

Przypuśćmy, żeśmy już dowiedli dla funkcyj dwuokresowych

$$\varphi(u)=R(\wp(u), \wp'(u))$$

Wtedy ... $\varphi(u+v)=R(\wp(u+v), \wp'(u+v))$

Różniczkując ~~to ostatnie~~ równanie dla $\wp(u+v)$ otrzymujemy wyrażenie na $\wp'(u+v)$ wymierne przez $\wp(u), \wp'(u), \wp(v), \wp'(v)$ tj będzie więc

(α) ~~$\varphi'(u+v)$~~ = $\varphi(u+v)=\overline{R}(\wp(u), \wp(v), \wp'(u), \wp'(v))$

Stąd z pomocą zrównania dla $\{\wp'(u)\}^2$, otrzymasię:

$$\varphi'(u) = R_1(\wp(u), \wp'(u))$$

Jeżeli ze zrównań $\varphi(u) = R(\wp(u), \wp'(u))$ i $\varphi'(u) = R_1(\wp(u), \wp'(u))$ dadzą się $\wp(u)$ i $\wp'(u)$ wyrazić wymiernie przez $\varphi(u)$ i $\varphi'(u)$, to podstawiwszy te wyrażenia do (α), otrzymamy twierdzenie pożądane (1.) twierdzenie dodawania).

Tam więc dowód postawionego twierdzenia rozpada na dwie części

1) każda funkcya 2 wuorresowa $\varphi(u)$ wyraża się wymiernie przez $\wp(u)$, $\wp'(u)$.

2) funkcye $\wp(u)$, $\wp'(u)$ wyrażają się wymiernie przez $\varphi(u)$ i $\varphi'(u)$.

Rozpatrzmy wyznacznik:

$$\varphi(u, u_1, u_2, \ldots u_n) = \begin{vmatrix} 1 & \wp(u) & \wp'(u) \ldots & \wp^{(n-1)}(u) \\ 1 & \wp(u_1) & \wp'(u_1) \ldots & \wp^{(n-1)}(u_1) \\ 1 & \wp(u_2) & \wp'(u_2) \ldots & \wp^{(n-1)}(u_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \wp(u_n) & \wp'(u_n) \ldots & \wp^{(n-1)}(u_n) \end{vmatrix}$$

Jest to funkcya dwuokresowa z okresami $2\omega, 2\omega'$, ponieważ $\wp(u), \wp'(u), \dots \wp^{(n-1)}(u)$ posiadają tę własność. (?) staje się zerem $(n+1)^{\text{go}}$ rzędu dla $u=0$, jak to widzimy ze zrównań:

$$\wp(u) = u^{-2} + u^2 \mathfrak{P}(u)$$

$$\wp^{(n-1)}(u) = (-1)^{n-1} n!\, u^{-(n+1)} + \mathfrak{P}(u)$$

Jest więc $\varphi(u, u_1, u_2, \dots u_n)$ funkcya dwuokresowa rzędu $n+1$. Ona staje się zerem dla $u = u_1$, $u = u_2, \dots$ $u = u_n$, więc i dla $u = -(u_1 + u_2 + \dots + u_n)$ skąd wnosimy, że φ można przedstawić jak następuje

$$\varphi(u, u_1, u_2, \dots u_n) = C_n \frac{\sigma(u + u_1 + u_2 + \dots + u_n)\,\sigma(u - u_1)\,\sigma(u - u_2) \dots \sigma(u - u_n)}{\sigma^{n+1}(u)}$$

Dla oznaczenia stałej wystarcza porównanie spółczynników pierwszych wyrazów lewej i prawej strony, rozwiniętych na szereg.

Mamy $(-1)^{n-1} n!\, \varphi(u_1, u_2, \dots u_n) = C_n (-1)^n \sigma(u_1)\,\sigma(u_2) \dots \sigma(u_n)\,\sigma(u_1 + u_2 + \dots + u_n)$

gdzie

$$\varphi(u_1, u_2, \dots u_n) = \begin{vmatrix} 1 & \wp(u_1) & \wp'(u_1) & \dots & \wp^{(n-2)}(u_1) \\ 1 & \wp(u_2) & \wp'(u_2) & \dots & \wp^{(n-2)}(u_2) \\ \dots \\ 1 & \wp(u_n) & \wp'(u_n) & \dots & \wp^{(n-2)}(u_n) \end{vmatrix}$$

Stąd wynika

$$\varphi(u,u_1,u_2,\dots u_n) = -n!\,\frac{\sigma(u+u_1+\dots+u_n)\sigma(u-u_1)\dots\sigma(u-u_n)}{\sigma^{n+1}(u)\sigma(u_1)\sigma(u_2)\dots\sigma(u_n)\sigma(u_1+u_2+\dots+u_n)}\,\varphi(u_1,u_2,\dots u_n)$$

$\varphi(u_1,u_2,\dots u_n)$ jest tegoż układu co i $\varphi(u,u_1,u_2,\dots u_n)$, lecz zależy od mniejszej ilości argumentów. Z tej przyczyny można napisać:

$$\varphi(u_1,u_2,\dots u_n) = -(n-1)!\,\frac{\sigma(u_1+u_2+\dots+u_n)\sigma(u_1-u_2)\sigma(u_1-u_3)\dots\sigma(u_1-u_n)}{\sigma^{n}(u_1)\sigma(u_2)\sigma(u_3)\dots\sigma(u_n)\sigma(u_2+u_3+\dots+u_n)}\,\varphi(u_2,u_3,\dots u_n)$$

$$\varphi(u_2,u_3,\dots u_n) = -(n-2)!\,\frac{\sigma(u_2+u_3+\dots+u_n)\sigma(u_2-u_3)\sigma(u_2-u_4)\dots\sigma(u_2-u_n)}{\sigma^{n-1}(u_2)\sigma(u_3)\sigma(u_4)\dots\sigma(u_3+u_4+\dots+u_n)}$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$\varphi(u_{n-1},u_n) = \begin{vmatrix} 1 & \wp(u_{n-1}) \\ 1 & \wp(u_n)\end{vmatrix} = +\,\frac{\sigma(u_{n-1}+u_n)\sigma(u_{n-1}-u_n)}{\sigma^2(u_{n-1})\sigma^2(u_n)}$$

Mnożąc te wszystkie wyrażenia między sobą, otrzymujemy:

$$\varphi(u,u_1,u_2,\dots u_n) = (-1)^{n-1}\,2!\,3!\dots n!\,\frac{\sigma(u+u_1+u_2+\dots+u_n)\sigma(u-u_1)\dots\sigma(u-u_n)\sigma(u_1-u_2)\dots\sigma(u_{n-1}-u_n)}{\sigma^{n+1}(u)\sigma^{n+1}(u_1)\sigma^{n+1}(u_2)\dots\sigma^{n+1}(u_n)}$$

$$\frac{\sigma(u+u_1+\dots+u_n)\sigma(u-u_1)\dots\sigma(u-u_n)\sigma(u_1-u_2)\dots\sigma(u_{n-1}-u_n)}{\sigma^{n+1}(u)\sigma^{n+1}(u_1)\sigma^{n+1}(u_2)\dots\sigma^{n+1}(u_n)} = (-1)^{n-1}\,\frac{1}{2!\,3!\dots n!}\begin{vmatrix} 1 & \wp(u) & \wp'(u) & \dots & \wp^{(n-1)}(u) \\ 1 & \wp(u_1) & \wp'(u_1) & \dots & \wp^{(n-1)}(u_1) \\ \dots & & & & \\ 1 & \wp(u_n) & \wp'(u_n) & \dots & \wp^{(n-1)}(u_n)\end{vmatrix}$$

Stąd łatwo się przekonać, że funkcya dwuokresowa ~~rzędu n+1~~ z nieskończonością $n+1^{go}$ rzędu w punkcie $u=0$, posiadająca zera w punktach $u_1, u_2, u_3, \dots, -(u_1+u_2+\dots+u_n)$ wyraża się wymiernie

przez $\wp(u)$ i $\wp'(u)$. W rzeczy samej

$$\{\wp'(u)\}^2 = 4\wp^3(u) - g_2\wp(u) - g_3$$
$$\wp''(u) = 6\wp^2(u) - \tfrac{1}{2}g_2$$
$$\wp'''(u) = 12\wp(u)\wp'(u)$$
$$\wp^{(IV)}(u) = 120\wp^3(u) - 18g_2\wp(u) - 12g_3$$

wogóle:

$$\wp^{(2n)}(u) = G_n(\wp(u))$$
$$\wp^{(2n+1)}(u) = G_n'(\wp(u))\wp'(u)$$
$$\wp^{(2n+2)}(u) = G_n''(\wp(u))\wp'^2(u) + G_n'(\wp(u))\wp''(u) = G_{n+1}(\wp(u))$$

Wyznacznik jest funkcyą liniową wielkości $\wp(u), \wp'(u), \ldots \wp^{(n-1)}(u)$, dlatego też nasza funkcya dwuokresowa przedstawi się pod kształtem $M + N\wp'(u)$, gdzie M i N są funkcyami całkowitemi $\wp(u)$.

Mamy udowodnić teraz, że każda inna funkcya dwuokresowa funkcya $\varphi(u)$ rzędu n, stającą się ∞ i zerem w jakichkolwiek punktach wewnątrz równoległoboku okresu i to jakąkolwiek ilość razy w każdym

takim punkcie, wyrażają takie wyniesienie przez $\wp(u)$, $\wp'(u)$.

$\varphi'(u)$ funkcya dwuokresowa, która staje się ∞'ą dla tychże punktów jak i $\varphi(u)$, ~~będąc~~ posiadając dla tych punktów odnośnie rząd o 1 większy. Dla tego ma $\varphi'(u)$ także skończoną ilość zer. Niech $\varphi'(u)$ staje się zerem dla $u=u_1, u_2, \ldots$ i niech nadto

$\varphi(u_1)=A_1$, $\varphi(u_2)=A_2, \ldots$

Niech będzie jeszcze A różne od $A_1, A_2, \ldots$; wtedy $\varphi(u)-A$ będzie funkcya dwuokresowa, która staje się ∞'ą dla tychże punktach, co i $\varphi(u)$, przytem tegoż samego rzędu. Pierwiastki czyli zera tej funkcyi są rzędu pierwszego, ponieważ $\varphi'(u)$ dla nich nie równa się zeru. Jeżeli B czyni zadość tym że warunkom, co A, to będzie:

$$\frac{\varphi(u)-A}{\varphi(u)-B}$$

funkcya dwuokresowa, posiadająca n zer: $a_1, a_2, \ldots a_n$ i n nieskończoności: $b_1, b_2, \ldots b_n$ wszystkie rzędu pierwszego. Chcąc mieć ~~dla~~ na ten ułamek wartość 1 dla $u=u_0$, musimy napisać

$$\frac{\varphi(u)-A}{\varphi(u)-B}\cdot\frac{\varphi(u_0)-B}{\varphi(u_0)-A}=\frac{\sigma(u-a_1)\ldots\sigma(u-a_n)\sigma(u_0-b_1)\ldots\sigma(u_0-b_n)}{\sigma(u-b_1)\ldots\sigma(u-b_n)\sigma(u_0-a_1)\ldots\sigma(u_0-a_n)}$$

Mieliśmy powyżej

$$\varphi(u, a_1, a_2, \ldots a_n) = [a_1 a_2 \cdots a_n] \frac{\sigma(u+a_1+a_2+\cdots+a_n)\sigma(u-a_1)\cdots\sigma(u-a_n)}{\sigma^{n+1}(u)}$$

Więc:

$$\frac{\varphi(u, a_1, \ldots a_n)}{\varphi(u_0, a_1, \ldots a_n)} = \frac{\sigma(u+a_1+\cdots+a_n)}{\sigma(u_0+a_1+\cdots+a_n)} \left(\frac{\sigma(u_0)}{\sigma(u)}\right)^{n+1} \frac{\sigma(u-a_1)\cdots\sigma(u-a_n)}{\sigma(u_0-a_1)\cdots\sigma(u_0-a_n)}$$

Także:

$$\frac{\varphi(u, b_1, b_2, \ldots b_n)}{\varphi(u_0, b_1, \ldots b_n)} = \frac{\sigma(u+b_1+\cdots+b_n)}{\sigma(u_0+b_1+\cdots+b_n)} \left(\frac{\sigma(u_0)}{\sigma(u)}\right)^{n+1} \frac{\sigma(u-b_1)\cdots\sigma(u-b_n)}{\sigma(u_0-b_1)\cdots\sigma(u_0-b_n)}$$

Zważywszy, że $a_1+a_2+\cdots+a_n = b_1+b_2+\cdots+b_n$, znajdujemy:

$$\frac{\varphi(u)-A}{\varphi(u)-B} \cdot \frac{\varphi(u_0)-B}{\varphi(u_0)-A} = \frac{\varphi(u, a_1, a_2, \ldots a_n)}{\varphi(u, b_1, b_2, \ldots b_n)} \cdot \frac{\varphi(u_0, b_1, \ldots b_n)}{\varphi(u_0, a_1, \ldots a_n)}$$

Widzieliśmy, że $\varphi(u, a_1, a_2, \ldots a_n)$ wyraża się wymiernie przez $\wp(u)$, $\wp'(u)$, a więc

$$\varphi(u) = \frac{P+Q\wp'(u)}{P_1+Q_1\wp'(u)} = \frac{\{P+Q\wp'(u)\}\{P_1-Q_1\wp'(u)\}}{P_1^2-Q_1^2(\wp'(u))^2} = \frac{L+M\wp'(u)}{N},$$

gdzie L, M, N funkcye całkowite $\wp(u)$.

Zanim przejdziemy do części drugiej zastanowionego twierdzenia, musimy się zastanowić nad niektórami uwagami treści algiebrycznej.

Niech będą X, Y funkcye wymierne zmiennych ξ, η kształtu

$$1)\quad X = \frac{g(\xi) + \eta h(\xi)}{f(\xi)}$$

$$2)\quad Y = \frac{g_1(\xi) + \eta h_1(\xi)}{f_1(\xi)}$$

, nadto

$$3)\quad \eta^2 - R(\xi) = 0.$$

Z pomocą (3), mamy

$$4)\quad (f \cdot X - g)^2 - h^2 R = 0$$

$$5)\quad (f_1 \cdot Y - g_1)^2 - h_1^2 R = 0$$

Rugując ξ, otrzymujemy stąd

$$6)\quad F(X, Y) = 0.$$

Chodzi nam o zbadanie warunków wymiernego wyrażenia się ξ, η przez X, Y.

Z równania (4) można podać w kształcie:

$$f^2 X^2 - 2fg \cdot X + g^2 - h^2 R = 0.$$

Jeśli spółczynniki (względem X) posiadają czynnik wspólny, możemy się go pozbyć (za pomocą dzielenia). Niech zostanie równanie rzędu n względem ξ. Każdej wartości X odpowiadać będzie

n wartości na ξ, a na mocy (1) jest

$$\eta = \frac{f.X - g}{h}$$

więc oraz i n wartości na η.

Ażeby pomiędzy wartościami na ξ nie było równych, musi być h różnym od 0. Zrównanie (4) względem X może się rozłożyć na dwa czynniki jeśli h nie $= 0$, wtedy też tylko względem ξ będzie się ono składało z 2 czynników. W razie zaś $h \mid= 0$, zrównanie (4) jest irreducyjne, nie może więc mieć równych pierwiastków. Na podstawie (1) η przybiera także n wartości odrębnych, każdej więc wartości X odpowiada n par różnych wartości ξ, η. Jeżeli $h = 0$, to (4) sprowadza się do kształtu irreducyjnego $fX - g = 0$, rzędu, powiedzmy, ν względem ξ. Każdemu X odpowiada ν różnych wartości ξ, a na podstawie (3) 2ν wartości różnych η. Niech X odpowiadają pary:

$$\xi\eta, \quad \xi_1\eta_1, \quad \xi_2\eta_2, \ldots$$

Podstawiwszy te wartości do (2) znajdziemy w ogóle

n wartości na Y: $Y_1, Y_2, \ldots$ Z pomiędzy tych mogą być niektóre równe między sobą. Jeśli dla każdego X otrzymuje się $\underline{n}$ różnych wartości Y, można udowodnić, że ξ i η wyrażają się wymiernie przez X i Y.

Istotnie, niech zrównanie (2) daje nam na Y wartość Y_1 odpowiadającą ξ_1, η_1. Wtedy $\xi = \xi_1$ czyni zadość tożsamościowo zrównaniom:

$$(f.X - g)^2 - h^2 R = 0$$

$$(f_1.Y - g_1)^2 - h_1^2 R = 0$$

Te zrównania mają pierwiastek wspólny $\xi = \xi_1$. Inaczej zrównania

$$7) \quad X = \frac{g + h\eta}{f}, \quad Y_1 = \frac{g_1 + h_1\eta}{f_1}$$

posiadają parę wspólną pierwiastków tylko jedną ξ_1, η_1. Każda inna para ξ_2, η_2 da na Y wartość Y_2 różną od Y_1. Są więc ~~zrównania (7)~~ wyrażenia (7) wymierne liniowe funkcye ξ, η. Stąd wynika, że ξ i η dadzą się wyrazić wymiernie przez X i Y. „Źródło ...”

każdej wartości X odpowiada n par ξ, η i n różnych wartości Y, to ξ i η wyrażają się zawsze wymiernie przez X i Y i oprócz tego między X i Y istnieje związek (6)

Znaleźliśmy uprzednio

1) $\varphi(u) = \dfrac{L + M\wp'(u)}{N}$, więc:

2) $\varphi'(u) = \dfrac{L_1 + M_1\wp'(u)}{N_1}$

Niech $\wp(u) = \xi$, $\wp'(u) = \eta$. Zrównania (1) i (2) wezmą kształt

3) $\varphi(u) = \dfrac{L(\xi) + M(\xi).\eta}{N(\xi)}$

4) $\varphi'(u) = \dfrac{L_1(\xi) + M_1(\xi).\eta}{N_1(\xi)}$

Między ξ i η jest:

5) $\eta^2 - 4\xi^3 + g_2\xi + g_3 = 0$

Ze zrównań (3), (4), (5) rugujemy ξ i η. Będzie

6) $G(\varphi, \varphi') = 0.$

Z pomocą tego zrównania, wszystkie wyższe pochodne φ wyrażają się wymiernie przez φ i φ'. Różniczkujmy

Otrzymujemy:

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \varphi}\varphi' + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \varphi'}\varphi'' = 0 \text{ , albo}$$

$$\frac{d^2\varphi}{du^2} = -\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \varphi}\varphi' : \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \varphi'}$$

Z mianownika tego wyrażenia można usunąć φ'. Możemy przypuszczać, że równ. (6) jest irredukcyjne. W razie przeciwnym zrównanie to da się rozłożyć na kilka zrównań – każde irredukcyjne. Dla tego też $\mathcal{G}$ i $\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \varphi'}$ nie mają wspólnego dzielnika, można więc takie funkcye $\mathcal{P}$ i Q, że

$$\mathcal{P}\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \varphi'} - Q\mathcal{G} = 1$$

gdzie $\mathcal{P}$ i Q funkcye całkowite od φ', a spółczynniki funkcye wymierne od φ. Usuwając mianownik, otrzymamy:

$$\mathcal{P}_1\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \varphi'} - Q_1\mathcal{G} = R(\varphi),$$

gdzie $\mathcal{P}_1$, Q_1 funkcye całkowite od φ i φ' i R funkcya całkowita od φ. Lecz ponieważ $\mathcal{G}=0$

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \varphi'} = \frac{R(\varphi)}{\mathcal{P}_1} \text{ . stąd}$$

$$\frac{d^2\varphi}{du^2} = \frac{\mathcal{G}_2(\varphi,\varphi')}{R(\varphi)}$$

Wszystkie inne pochodne mają ten sam kształt, a w mia-

nowsinken rozwią się potęgą $R(\varphi)$. Przypuśćmy, że

$$\frac{d^n\varphi}{du^n}=\frac{\mathcal{G}_n(\varphi,\varphi')}{R^{n-1}(\varphi)}$$

Stąd

$$\frac{d^{n+1}\varphi}{du^{n+1}}=\frac{\left(\frac{\partial \mathcal{G}_n}{\partial\varphi}\cdot\varphi'+\frac{\partial \mathcal{G}_n}{\partial\varphi'}\varphi''\right)R^{n-1}(\varphi)-(n-1)R^{n-2}(\varphi)\mathcal{G}_n\cdot\varphi'}{R^{2n-2}}$$

$$=\frac{\varphi'\left(R\frac{\partial \mathcal{G}_n}{\partial\varphi}-(n-1)\mathcal{G}_n\right)+\mathcal{G}_2\frac{\partial \mathcal{G}_n}{\partial\varphi'}}{R^n(\varphi)}\ \text{t. j.}$$

$$\frac{d^{n+1}\varphi}{du^{n+1}}=\frac{\mathcal{G}_{n+1}(\varphi,\varphi')}{R^n(\varphi)}.$$

Stąd metodą indukcyjną dowodzimy twierdzenia.

Dajmy u wartość określoną, $\varphi(u)$ otrzyma także wartość określoną. Tej wartości odpowiada 2 par $\xi\eta$.

Zrównanie $\wp(u)-\xi_1$ ma tylko jeden pierwiastek $u=u_1$, dla którego $\wp'(u_1)=\eta_1$. Istotnie $\wp(u)-\xi_1$ staje się ∞ dla $u=0$ rzędu 2. Stąd wewnątrz równoległoboku okresu muszą być dwa nie niekongruentnych zera. Jeżeli jedno z nich $u=u_1$, to drugie $u=-u_1$. Lecz $\wp(u)$ jest parzysta, a $\wp'(u)$ – nieparzysta. Dlatego też tylko jedna wartość może czynić zadość dwóm zrównaniom $\wp(u)=\xi_1$, $\wp'(u)=\eta_1$

Tak więc jemnemu $\varphi(u)$ odpowiadają pary:

$\xi_1 = \wp(u_1)$, $\eta_1 = \wp'(u_1)$; $\xi_2 = \wp(u_2)$, $\eta_2 = \wp'(u_2)$; ...

Wnosząc to do (4) mieć będziemy $\underline{r}$ wartości dla $\varphi'(u)$

: $\varphi'(u_1)$, $\varphi'(u_2)$, ... $\varphi'(u_r)$.

Okażmy, że wszystkie te wartości różne są, wtenczas gdy $\varphi(u_1), \varphi(u_2), \dots \varphi(u_r)$ wszystkie są równe między sobą.

Dowiedźmy, że jeżeli jednocześnie zadość uczynimy zrównaniom

$$\varphi(u_1) = \varphi(u_2)$$
$$\varphi'(u_1) = \varphi'(u_2)$$

to u_1, u_2 powinny być kongruentne.

Ponieważ wszystkie pochodne rzędu wyższego są funkcyjami wymiernemi od $\varphi(u), \varphi'(u)$, będą więc także równe t. j. $\varphi''(u_1) = \varphi''(u_2)$, $\varphi'''(u_1) = \varphi'''(u_2)$, ...

Przytem u_1, u_2 wybrane tak, że $R(\varphi)$ nie $= 0$. Tym rozwinięcia

$$\varphi(u_1+v) = \varphi(u_1) + v\varphi'(u_1) + \frac{v^2}{2!}\varphi''(u_1) + \dots$$
$$\varphi(u_2+v) = \varphi(u_2) + v\varphi'(u_2) + \frac{v^2}{2!}\varphi''(u_2) + \dots$$

muszą być identyczne więc $\varphi(u_1+v) = \varphi(u_2+v)$.

Dowiedliśmy tego dla wartości v, dla których szeregi zbiegają się. Lecz ponieważ $\varphi(u_1+v)$, $\varphi(u_2+v)$ są jednowartościowe funkcye analityczne, powinno to mieć miejsce dla każdej wartości v. Zamiast v weźmy $v-u_1$, wtedy będzie

$$\varphi(v) = \varphi(v+u_2-u_1)$$

dla każdego v. Jest więc u_2-u_1 okres, a u_1 i u_2 są kongruentne wartości.

Tak więc wszystkie:

$$\varphi'(u_1), \varphi'(u_2), \ldots \varphi'(u_r)$$

są różne, stąd $\wp(u)$ i $\wp'(u)$ wyrażają się wymiernie przez $\varphi(u)$, $\varphi'(u)$, ponieważ wszystkie warunki tego mają miejsce.

Przypominając rozumowanie strony 72giej przekonujemy się o sprawiedliwości wypowiedzianego twierdzenia.

Uwaga. Przedstawiając $\wp(u)$ za pomocą funkcyi σ, rozpatrywaliśmy wielkości 2ω, $2\omega'$ – para okresowa – których stosunek $\frac{\omega'}{\omega}$ jest ilość (kompleksna) złożona. Nie przypuszczaliśmy przytem, że 2ω, $2\omega'$ są okresy pierwotne t.j. takie, że wszystkie inne okresy są w kształtu $2\nu\omega + 2\nu'\omega'$, ~~gdz~~ gdzie ν i ν' są liczby całkowite. Niech będą 2ϖ, $2\varpi'$ dwa okresy jakiekolwiek, a 2ω, $2\omega'$ – pierwotne. Musi być

$$\varpi = \alpha\omega + \beta\omega'$$

$$\varpi' = \alpha'\omega + \beta'\omega'$$

gdzie $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ – liczby całkowite. Jeżeli $\alpha\beta' - \alpha'\beta = \pm 1$, to można ω i ω', a więc i każdą parę okresów wyrazić przez ϖ i ϖ'; wtedy będzie i para 2ϖ, $2\varpi'$ – pierwotna. Jeżeli zaś $\alpha\beta' - \beta\alpha' (=) \pm 1$, to 2ϖ i $2\varpi'$ nie będą pierwotnymi. W obydwóch wypadkach $\wp(u)$ przedstawia się w kształcie ilorazu funkcyj σ i wyraża się wymiernie przez $\wp(u)$ i $\wp'(u)$. Lecz $\wp(u)$, $\wp'(u)$ wyrażają się wymiernie przez $\wp(u)$ i $\wp'(u)$ tylko wtedy, jeśli 2ϖ, $2\varpi'$ jest para

pierwotna. Różnica $u_2 - u_1 = 2r\omega + 2r'\omega'$ tylko w przypadku, gdy $2\omega, 2\omega'$ — para pierwotna. Nie można twierdzić, że $u_2 - u_1$ wyraża się w ten sposób przez $2\bar{\omega}$ i $2\bar{\omega}'$. Ztąd wynikać nie będzie, żeby między parami:

$$\xi = \wp(u|\bar{\omega}, \bar{\omega}'), \quad \eta = \wp'(u|\bar{\omega}, \bar{\omega}')$$

były dwie równych, na czem to głównie polega dowód twierdzenia. Gdyby się zdarzyło, że funkcya dwuokresowa $\varphi(u)$ wyraża się wymiernie przez $\wp(u), \wp'(u)$, odwrotnie zaś $\wp(u)$ nie da się wyrazić wymiernie przez $\varphi(u)$, $\varphi'(u)$, to znaczyć będzie, że mamy do czynienia z niepierwotnymi okresami.

